Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année LMD spécialité mathématique

Table des matières

Avant-propos

Ce cours est destiné aux étudiants de la deuxième année licence de mathématiques, ainsi qu'aux étudiants de deuxième année licence physique et de la science et de la technologie. Il porte sur les séries et les intégrales généralisées tout en tenant compte des derniers programmes.

Le cours est traité en détail avec de nombreux exemples. La plupart des théorèmes et propositions sont démontrés à quelques exceptions près où nous renvoyons le lecteur aux références correspondantes.

Sept chapitres composent cet cours :

Le premier chapitre introduit une bref rappel sur les suites numériques.

Dans le deuxième chapitre nous donnons les principales définitions, propriétés, et critères de convergence pour des séries numériques.

Le troisième chapitre est divisé en deux parties. La première partie porte sur les suites de fonctions. La deuxième partie traite les séries de fonctions. Nous avons exposé les divers types de convergence pour les suites et les séries de fonctions.

Le quatrième chapitre est consacré aux séries entières. Dans les quatre premières sections nous présentons l'essentiel sur le rayon et domaine de convergence, et la somme d'une série entière. Les trois suivantes sont consacrées au développement en série entière ainsi que leur application pour la résolution de certaines équations différentielles.

Le cinquième chapitre : Les deux premières sections donnent quelques éléments concernant les fonctions de classe C^1 par morceaux et les fonctions périodiques. Les deux sections suivantes sont consacrées aux séries trigonométriques et aux séries de Fourier. Dans les deux dernières sections nous présentons le théorème de Dirichlet et l'identité de Parseval.

Le sixième chapitre traite les intégrales généralisées. Nous avons donné quelques méthodes pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée de fonctions positives, ensuite nous avons généralisé aux fonctions de signe quelconque. Nous avons présenté aussi la méthode d'intégration par parties et la formule de changement de variable. À la fin de nous proposons une liste d'exercices corrigés.

Chapitre 1

Rappels sur les suites

1.1 Définitions

Définition 1.1. Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$, ou d'une partie de $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$.
La suite elle-même est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si elle est définie sur $\mathbb{N}$), ou simplement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de départ.
u_n est appelé **le terme de rang** n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. **croissante**, (resp. **strictement croissante**) si

$$u_n \leq u_{n+1}, \qquad (\text{resp. }, \ u_n < u_{n+1}) \quad \text{pour tout} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

2. **décroissante**, (resp. **strictement décroissante**) si

$$u_n \geq u_{n+1}, \qquad (\text{resp. }, \ u_n > u_{n+1}) \quad \text{pour tout} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

   On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante, (strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante).

Définition 1.3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. **majorée**, (resp. **minorée**) s'il existe un réel M (resp. m) tel que

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq M, \qquad (\text{resp.} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq m).$$

2. **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire

$$\exists \ m, \ M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ m \leq u_n \leq M.$$

   Autrement : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si

$$\exists M > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M.$$

Définition 1.4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **stationnaire**, si elle est constante à partir d'un certain rang.

1.2 Convergence

Définition 1.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et ℓ un réel. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** vers ℓ si :

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Définition 1.6 (Limite infinie). On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend

1. vers $+\infty$ si : $\forall\ A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_0 \quad u_n \geq A$.
2. vers $-\infty$ si : $\forall\ A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_0 \quad u_n \leq -A$.

Remarque 1.1. *La suppression d'un nombre* ***fini*** *de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.*

Proposition 1.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :*

$$\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell\Big) \Longleftrightarrow \Big((u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers } \ell\Big).$$

Proposition 1.2. *On a l'implication suivante :*

$$\Big(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\Big) \Longrightarrow \Big(|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|\Big)$$

Proposition 1.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Proposition 1.4. *Toute suite convergente est bornée.*

Théorème 1.5 (Opérations algébriques sur les suites convergentes).
On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$. Alors

1. $u_n \pm v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \pm v$,
2. $u_n.v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u.v$,
3. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.u$,
4. *si* $v \neq 0$, *on a* $\dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{v}$ *et* $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{u}{v}$.

Théorème 1.6 (Relation d'ordre). *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telle que : $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

1.3 Théorèmes de convergences

Théorème 1.7 (Théorème des gendarmes). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que :*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers* ℓ,
2. *pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \leq w_n \leq v_n$.

Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Théorème 1.8.

1. *Toute suite réelle croissante majorée est convergente.*
2. *Toute suite réelle décroissante minorée est convergente.*

Remarque 1.2. *Toute suite croissante (resp. décroissante) qui n'est pas majorée (resp. minorée) tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Définition 1.7. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dite **adjacentes** si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante,
2. la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème 1.9. *Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.*

Théorème 1.10. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*. Alors* $u_n.v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*.*

Définition 1.8 (**Suite extraite**)**.** Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **extraite** ou (**sous-suite**) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $v_n = u_{\phi(n)}$.

Proposition 1.11. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *alors toute sous-suite converge aussi vers* ℓ*.*

Théorème 1.12 (**Bolzano**[1]**-Weierstrass**[2])**.** *Toute suite bornée admet une sous suite convergente.*

Définition 1.9. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **de Cauchy**[3] si elle vérifie la propriété :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \geq q \geq n_0) \Rightarrow (|u_p - u_q| < \varepsilon).$$

Remarque 1.3. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Théorème 1.13. *Une suite réelle ou complexe est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

1. Bernhard BOLZANO (1781 - 1848), mathématicien tchèque.
2. Karl WEIERSTRASS (1815 - 1897), mathématicien allemand.
3. Augustin-Louis CAUCHY (1789 - 1857), mathématicien français.

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Généralités

Définition 2.1. Soit $(u_n)_n$ une suite réelles ou complexes. On lui associe une nouvelle suite $(S_n)_n$ donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le couple $\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\,(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ est appelé la **série de terme général** u_n.

- u_n est appelée **le terme général** de la série $\sum_n u_n$.
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ s'appelle **la somme partielle d'ordre** n de la série $\sum_n u_n$.
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite **des sommes partielles** de la série $\sum_n u_n$.

Notation. La série de terme général u_n sera notée $\sum_n u_n$ ou $\sum_{n\geq n_0} u_n$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.1. *1. Soit la série* $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$.

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}.$$

2. Soit la série $\sum_{n\geq 3} \frac{n!}{n^n}$.

$$S_n = \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \cdots + \frac{n!}{n^n}.$$

Définition 2.2. Une série $\sum_n u_n$ est dite **convergente** (ou qu'elle converge) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente.

La limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

On dira qu'une série est **divergente** (ou qu'elle diverge) si elle ne converge pas.

Remarque 2.1.

1. *La nature (convergente ou divergente) d'une série n'est pas changée si on modifie un nombre fini de termes de la série, mais la valeur de la somme peut changer.*
2. *Il faut manipuler la notation* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *avec prudence : elle ne désigne pas une somme au sens usuel du terme, mais une limite, celle des sommes partielles.*

Exemple 2.2 (**La série géométrique**)**.** *Soit* $r \in \mathbb{R}$*. On considère la série de terme général* $u_n = r^n$*.*

La suite des sommes partielles est données par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

Suivant la valeur de r *on obtient les cas suivants :*

- $|r| < 1$ *. On a* $S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-r}$*. Donc la série converge vers la somme*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

- $r > 1$*. On a* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ *car* $(r^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty)$*, alors la série diverge.*
- $r = 1$*. La suite des sommes partielles* $S_n = n + 1$*. Dans ce cas* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ *donc la série diverge.*
- $r \leq -1$*. La suite* r^n *n'a pas de limite quand* n *tend vers* $+\infty$*, donc la série diverge.*

Exemple 2.3. $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$.
La suite des sommes partielles est donnée par :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Donc la la série converge, et la somme $S = 1$*.*

Définition 2.3 (**Série télescopique**)**.** Une série $\sum\limits_{n} u_n$ est dite **télescopique** s'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que le terme général u_n peut s'écrire sous la forme

$$u_n = v_{n+1} - v_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2.1. *La série télescopique* $\sum_n (v_{n+1}-v_n)$ *est convergente si et seulement si la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente. De plus on a*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to\infty} v_n - v_0.$$

Proposition 2.2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des sommes partielles de la série* $\sum_n u_n$. *Alors on a :*

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad u_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 2.3 (Condition nécessaire de la convergence). *Pour que la série* $\sum_n u_n$ *converge, il faut que* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration. En effet si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, alors

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_n + u_{n+1}) = S + \lim_{n\to\infty} u_{n+1}.$$

On doit donc avoir

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

□

Remarque 2.2. *Cette propriété est très utile pour prouver qu'une série diverge. En effet, si le terme général de la série ne converge pas vers* 0*, on peut tout de suite affirmer que la série ne peut pas converger.*

Mais cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.4 (Série harmonique). *Soit* $u_n = \frac{1}{n}$. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est appelée la* ***série harmonique****. La suite des sommes partielles est :*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a bien $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. *Mais la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Pour $n \geq 1$, on a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy et donc diverge.

Définition 2.4. Une série dont le terme général ne tend pas vers zéro sera dite **grossièrement divergente**.

Exemple 2.5. *1. La série* $\sum_n \cos n$ *diverge grossièrement car* $\lim_{n\to+\infty} \cos(n)$ *n'existe pas.*
2. La série $\sum_n \frac{n-1}{n}$ *diverge grossièrement car* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Définition 2.5. Soit $\sum_n u_n$ une série convergente. La somme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ est appelée le $n^{\text{ème}}$ reste ou (reste d'ordre n) de la série. On note R_n :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 2.4. *Soit* $\sum_n u_n$ *une série convergente. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, R_n *le reste d'ordre* n.
Alors : $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. On a $R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. $\square$

Théorème 2.5 (Condition nécessaire et suffisante de convergence).
Une série $\sum_n u_n$ *est convergente si et seulement si elle vérifie le* ***critère de Cauchy****, qui se traduit par :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N},\ \Big(q > p \geq n_0\Big) \Rightarrow \left(\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| < \varepsilon\right).$$

Démonstration. La série $\sum_n u_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée converge. On note S la somme de la série. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq m.$$

Soit $n_0 := m + 1$. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p \geq n_0$, on a :

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| = |S_q - S_p| \leq |S_q - S| + |S_p - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

2.2 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 2.6. *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ *deux séries numériques convergentes. Alors*

1. *la série* $\sum_n (u_n + v_n)$ *est convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

2. *la série* $\sum_n \lambda u_n$ *est convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right).$$

Démonstration. Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ respectivement. On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = S_n + T_n, \tag{2.1}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k) = \lambda S_n. \tag{2.2}$$

Comme les séries $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ convergent, les suites des sommes partielles associées convergent aussi. On passe à la limite dans (2.1) et (2.2) on obtient le résultat. □

2.3 Séries à termes positifs

Définition 2.6. Une série $\sum_n u_n$ est dite **à termes positifs** lorsque $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang. Autrement dit : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Remarque 2.3. *La suite des sommes partielles d'une série à terme positif est croissante. En effet* $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$.

Proposition 2.7. *La série* $\sum_n u_n$ *est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*
Dans le cas contraire, la série diverge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Démonstration. D'après le théorème 1.8. Puisque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle converge si et seulement si, elle est majorée. □

Exemple 2.6. *Considérons la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *Remarquons que, pour* $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}.$$

Il en résulte que

$$
\begin{aligned}
S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.
\end{aligned}
$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, donc la série* $\sum_{n} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Remarque 2.4. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est un cas particulier d'une série appelée "série de Riemann*[1] *".*

Théorème 2.8 (Règle de comparaison). *Soit* $\sum_{n} u_n$ *et* $\sum_{n} v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que :*

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors :

1. *Si la série* $\sum_{n} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n} u_n$ *converge ; et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. *Si la série* $\sum_{n} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n} u_n$ *diverge.*

Démonstration.

1. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum_{n} u_n$ et $\sum_{n} v_n$ respectivement.

Supposons que $\sum_{n} v_n$ est convergente. D'après la proposition 2.7 la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (c.-à-d. $\exists M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leq M$).
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k = T_n \leq M,$$

donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, ce qui entraîne que la série $\sum_{n} u_n$ converge.
Par passage à la limite, l'inégalité $S_n \leq T_n$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

1. Bernhard RIEMANN (1826 - 1866), mathématicien allemand.

2. Supposons maintenant que $\sum_n u_n$ diverge, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$, on déduit la divergence de la série $\sum_n v_n$. $\square$

Exemple 2.7. 1. *Considérons la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n-1}{5^n+2}$.

C'est une série à terme positif et on a

$$\frac{3^n-1}{5^n+2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad \textit{pour tout} \quad n \geq 0,$$

et donc la série $\sum_n \left(\frac{3}{5}\right)^n$ *est une série géométrique convergente de raison* $\frac{3}{5} < 1$.

D'où la convergence d'après la règle de comparaison.

2. *Étude de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ln(n)+n}$.

Pour tout $n \geq 1$ *on a* $\ln(n) + n \leq 2n$ *et donc*

$$\frac{1}{\ln(n)+n} \geq \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum_n \frac{1}{n}$ *est divergente, on déduit que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ln(n)+n}$ *est divergente.*

Définition 2.7. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On dit qu'elles sont équivalentes quand n tend vers l'infini s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro, telle que :

$$u_n = v_n(1+\varepsilon_n).$$

On note : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition 2.9 (**Caractérisation** [1]). *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Si* v_n *ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \textit{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Théorème 2.10 (**Règle d'équivalence**). *Soient* $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que,* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Alors les séries $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *sont de même nature.*

Démonstration. Puisque $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \ \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon,$$

et alors

$$\forall n \geq n_0, \quad (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$

On applique alors la règle de comparaison. $\square$

Exemple 2.8. 1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{5^n+n}$. *On a*

$$\frac{2^{2n}}{5^n+n} = \frac{2^{2n}}{5^n}\frac{1}{1+\frac{n}{5^n}} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

comme la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ *est convergente (c'est une suite géométrique de raison* $\frac{4}{5}<1$*), la règle précédente montre que la série donnée est convergente.*

2. *On considère la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+\cos(n)}{n^3+n}$. *On a*

$$\frac{n^2+\cos(n)}{n^3+n} = \frac{1}{n}\times\frac{1+\frac{\cos(n)}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

donc la série donnée est équivalente à la série harmonique, d'où la divergence.

Proposition 2.11 (**équivalents aux fonctions usuelles** [1])**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. *Alors*

1. $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
2. $e^{u_n}-1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$
3. $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
4. $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
5. $\arctan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
6. $1-\cos(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(u_n)^2$
7. $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$
8. $\mathrm{sh}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
9. $\mathrm{th}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
10. $\arcsin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
11. $\mathrm{argsh}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
12. $\mathrm{argth}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$

Théorème 2.12 (**Règle de d'Alembert** [2])**.** *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes réels* ***strictement positifs*** *telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \qquad avec \qquad \ell\in[0,+\infty].$$

Alors

◇ *Si* $\ell<1$ *la série* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

◇ *Si* $\ell>1$ *la série* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

◇ *Si* $\ell=1$*, on ne peut pas conclure .*

Démonstration.

◇ **Si** $\ell<1$. Il existe un réel r tel que $\ell<r<1$ et il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n\geq n_0$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n}<r$. On en déduit par récurrence, pour tout entier $n\geq n_0$:

$$u_n < ru_{n-1} < r^2u_{n-2} < \cdots < r^{n-n_0}u_{n_0} = \left(\frac{u_{n_0}}{r^{n_0}}\right)r^n.$$

Or la série géométrique $\sum_n r^n$ converge puisque $0<r<1$.

Donc la série de terme général u_n est convergente.

2. Jean le Rond D'ALEMBERT (1717 - 1783), mathématicien français.

◇ **Si** $\ell > 1$ **éventuellement** $\ell = +\infty$**.** Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. On en déduit que $u_{n+1} > u_{n_0} > 0$ pour tout $n \geq n_0$. Le terme général u_n ne tend pas vers 0. La série $\sum_n u_n$ est donc divergente.

◇ On ne sait rien dire lorsque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ et celle de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ vérifient $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, mais la première diverge (série harmonique) alors que la seconde converge (Série de Riemann).

□

Exemple 2.9. *1. Étude de la série* $\sum_n \dfrac{n^n}{n!}$.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e} < 1$, *d'où la convergence de la série* $\sum_n \dfrac{n^n}{n!}$.

2. Étude de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

Pour tout $n \geq 1$ *on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)2^{2n-1}}{(2n+1)2^{2n+1}} = \frac{(2n-1)}{4(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1.$$

Donc la série donnée converge d'après la règle de D'Alembert.

Théorème 2.13 (**Règle de Cauchy**)**.** *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes réels positifs telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell, \qquad \text{avec} \qquad \ell \in [0, +\infty].$$

Alors

◇ *Si* $\ell < 1$ *la série* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

◇ *Si* $\ell > 1$ *la série* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

◇ *Si* $\ell = 1$, *on ne peut pas conclure .*

Démonstration. ◇ **Si** $\ell < 1$**,** il existe $r \in]\ell, 1[$ et un entier n_0 tel que : pour tout $n \geq n_0$ on a $\sqrt[n]{u_n} < r$, d'où $u_n < r^n$. La série $\sum_n r^n$ est une série géométrique convergente car $r < 1$. Donc d'après la règle de comparaison la série $\sum_n u_n$ converge.

◇ **Si** $\ell > 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt[n]{u_n} > 1$, et alors $u_n > 1$. Ceci implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et donc la série $\sum_n u_n$ est divergente.

$\diamondsuit$ **Si** $\ell = 1$, les deux séries de terme général $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$ vérifient la condition $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Or la première diverge (série harmonique). Par contre la deuxième converge (série de Riemann). $\square$

Exemple 2.10. *Étude de la série* $\displaystyle\sum_n \frac{n^a}{3^n}$ *pour* $a \in \mathbb{R}$.

On a $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{\sqrt[n]{n^a}}{3} = \dfrac{e^{a\frac{\ln(n)}{n}}}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3} < 1$. *D'où, la convergence d'après la règle de Cauchy.*

Théorème 2.14 (Comparaison avec une intégrale). *Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante, telle que :* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
On pose $n_0 = [a] + 1$ ($[a]$ la partie entière de a), et $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$.
Alors la série $\displaystyle\sum_n u_n$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge*[3].
En cas de convergence on a :

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt.$$

Démonstration. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_n u_n$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n_0$. Puisque f est décroissante on peut écrire pour tout $x \in [k, k+1]$

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \Longrightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

Sommons ces inégalités pour $k = n_0, \cdots, n$, et on applique la relation de Chasles[4]. On obtient

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

Par hypothèse on a $f(n) = u_n$, et alors

$$S_{n+1} - u_{n_0} \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq S_n.$$

On a aussi

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq S_n \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt + u_{n_0}.$$

Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, de l'inégalité de droite on a $\displaystyle\sum_n u_n$ converge si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, et de celle de gauche la réciproque. $\square$

Théorème 2.15 (Série de Riemann). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

3. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite convergente si la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe. Voir Chapitre 6.
4. Michel Chasles (15 novembre 1793 à Épernon, 18 décembre 1880 Paris), mathématicien français.

Démonstration. $\diamondsuit$ **Si** $\alpha \leq 0$, le terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.

$\diamondsuit$ **Si** $\alpha = 1$, c'est la série harmonique, qui diverge.

$\diamondsuit$ **Si** $0 < \alpha < 1$**,** on a $n^\alpha \leq n$ donc $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 1$. D'après la règle de comparaison la série diverge.

$\diamondsuit$ **Si** $\alpha > 1$**,** on considère la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente.

Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

$\square$

Théorème 2.16 (**Règle de Riemann**)**.** *Soit* $\displaystyle\sum_n u_n$ *une série à termes positifs. S'il existe*

1. $\alpha > 1$ *tel que* $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$*, alors la série* $\displaystyle\sum_n u_n$ *converge.*
2. $\alpha \leq 1$ *tel que* $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$*, alors la série* $\displaystyle\sum_n u_n$ *diverge.*

Démonstration. 1. Soit $\alpha > 1$. Comme $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n^\alpha u_n \leq \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Ceci implique : $u_n \leq \dfrac{\varepsilon}{n^\alpha}$. Comme $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge d'après la règle de comparaison.

2. Pour $\alpha \leq 1$, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n^\alpha u_n \geq A \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

On obtient

$$u_n \geq \frac{A}{n^\alpha} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Le fait que $\alpha \leq 1$ la série $\displaystyle\sum_n u_n$ diverge par comparaison avec la série de Riemann $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$.

$\square$

Proposition 2.17 (**Série de Bertrand**[5])**.** *Soit* α *et* β *deux nombres réels. La série* $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* $(\alpha > 1)$*, ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$*.*

5. Joseph Bertrand (1822-1900), mathématicien français.

Démonstration. 1. SI $\alpha > 1$, il existe un réel γ tel que $1 < \gamma < \alpha$. Alors

$$n^{\gamma}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^{\beta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $\alpha - \gamma > 0$. Donc d'après la règle de Riemann 2.16 la série de Bertrand converge.

2. Si $\alpha < 1$. De même manière, on a

$$n\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = n^{1-\alpha}(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série est divergente.

3. Supposons que $\alpha = 1$.
   - Si $\beta \leq 0$, pour tout $n \geq 3$ on a $\dfrac{1}{n(\ln n)^{\beta}} \geq \dfrac{1}{n}$ donc d'après la règle de comparaison la série $\displaystyle\sum_{n} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ est divergente.
   - Si $\beta > 0$. La fonction $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\beta}}$ est positive et décroissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$, donc en utilisant la règle de comparaison avec une intégrale (Théorème 2.14).
     Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}} = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^x = \frac{1}{1-\beta}\Big((\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\Big).$$

Il en résulte que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}} = \begin{cases} \dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta - 1}, & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty, & \text{si } 0 < \beta < 1. \end{cases}$$

Alors, la série converge si $\beta > 1$, et diverge si $0 < \beta < 1$.
Maintenant si $\beta = 1$.

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc, la série $\displaystyle\sum_{n}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ diverge.

□

2.4 Séries à termes quelconques

2.4.1 Convergence absolue

Définition 2.8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est absolument convergente (ou converge absolument) si la série $\displaystyle\sum_n |u_n|$ converge.

Définition 2.9. On dit que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est **semi-convergente** si elle converge mais ne converge pas absolument.

Théorème 2.18. *Toute série* $\sum_n u_n$ *absolument convergente est convergente et on a*

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Soit $\sum_n u_n$ une série absolument convergente. Pour montrer la convergence de la série $\sum_n u_n$ on montre que la suite des sommes partielles notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Notons $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_n |u_n|$, donc elle vérifie le critère de Cauchy (Théorème 2.5) ; autrement dit : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$T_m - T_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_m| < \varepsilon \text{ pour tout } m \geq n \geq n_0.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on a pour tout $m \geq n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &\leq |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| \\ &\leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_m| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, d'où la convergence de la série $\sum_n u_n$.

En passant à la limite sur m dans l'inégalité suivante

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |u_k|,$$

et puisque les deux limites existent on obtient l'inégalité énoncée. □

Remarque 2.5. *La réciproque du théorème précédent est fausse.*

Exemple 2.11 (Série harmonique alternée).
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *est appelée série* ***harmonique alternée****. Elle converge d'après le critère de Leibniz (voir l'exemple 2.13 (cas* $\alpha = 1$*)).*
Mais cette série ne converge pas absolument, elle est donc semi-convergente.

2.4.2 Transformation d'Abel

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. On note $u_n = a_n b_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Une transformation d'Abel sur la série $\sum_n u_n$ c'est l'écriture suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k + b_n S_n. \tag{2.3}$$

En effet, an a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \\
&= a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})b_k \\
&= a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_kS_k - \sum_{k=1}^{n} b_kS_{k-1} \\
&= a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_kS_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}S_k \\
&= a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} b_kS_k + b_nS_n - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}S_k.
\end{aligned}$$

Par hypothèse on a $S_0 = a_0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k + b_nS_n.$$

Théorème 2.19 (Critère d'Abel[6]). *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que*

1. *Il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout n, on ait $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M$.*
2. *$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et décroissante vers 0.*

Alors la série $\sum_n a_nb_n$ est convergente.

Démonstration. On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_n a_nb_n$, donc $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_k$.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, donc d'après 2., $|S_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant la transformation d'Abel (2.3) on obtient

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}(b_k - b_{k+1})S_k + b_nS_n. \tag{2.4}$$

La série $\sum_n (b_n - b_{n+1})S_n$ converge absolument car

$$|(b_n - b_{n+1})S_n| \leq M(b_n - b_{n+1}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus la série $\sum_n (b_n - b_{n+1})$ est une série télescopique[7] convergente (Car $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$).

Dans (2.4) on a $b_nS_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.

Donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, d'où la convergence de la série $\sum_n a_nb_n$. □

6. Niels ABEL (1802 - 1829), mathématicien norvégien.
7. voir la proposition 2.1

2.4.3 Séries alternées

Définition 2.10. On appelle **série alternée** une série numérique dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ ou $(-1)^{n+1} u_n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive.

Exemple 2.12. $\sum_n (-1)^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 2.20 (Critère de Leibniz [8]). *Soit la série alternée $\sum_n (-1)^n u_n$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors la série alternée $\sum_n (-1)^n u_n$ converge.*
De plus on a la majoration du reste d'ordre n :

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|. \tag{2.5}$$

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.
On pose $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_n (-1)^n u_n$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. On a $S_n = S_{2n} - S_{2n+1}$.
La série $\sum_n (-1)^n u_n$ converge si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Pour cela on va montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Si c'est le cas les deux suites auront une même limite $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.
En utilisant la décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient les inégalités suivantes :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0.$$

Donc la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$) est décroissante (resp. croissante).
De plus on a

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En on déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

De plus pour tout , $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$, d'où les inégalités

$$0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}.$$

$$R_{2n} = S - S_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}.$$

On obtient $0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2}$, $R_{2n} \leq 0$ et $|R_{2n}| \leq |u_{2n+1}|$. □

Exemple 2.13. *Étude de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.*

Si $\alpha < 0$ on a : $|u_n| = n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série diverge car la condition nécessaire n'est pas satisfaite. De même pour $\alpha = 0$ car $|u_n| = 1$.

Si $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et décroissante. Donc d'après le critère de Leibniz la série converge.

8. Gottfried Willhelm LEIBNIZ (1646 - 1716), mathématicien allemand.

2.4.4 Produit de Cauchy des séries

Définition 2.11. On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$, la série $\sum_n w_n$ telle que :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q.$$

Exemple 2.14. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suit réelles telles que : $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.*
La série produit $\sum_n w_n$ de la série $\sum_n u_n$ avec elle même. On note $w_0 = 0$, pour tout $n \geq 1$

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Remarque 2.6. *Les termes de la somme $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ sont tous supérieurs à $\frac{1}{2n}$. Donc, on a*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

En on déduit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et par conséquent $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$. Donc la série $\sum_n w_n$ est grossièrement divergente.

On remarque que la série produit diverge malgré que la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (voir l'exemple 2.13).

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que le produit de deux séries convergentes soit une série convergente.

Théorème 2.21. *Le Produit de Cauchy $\sum_n w_n$ de deux séries absolument convergentes $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ est une série absolument convergente.*
De plus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_p v_q \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Démonstration. On considère les suites des sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.
On pose

$$I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \leq p \leq n\}.$$

$$J_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p+q \leq n\}.$$

D'autre part, on note

$$W_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k} u_p v_q\right) = \sum_{(p,q)\in J_n} u_p v_q$$

$$U_n V_n = \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{(p,q)\in I_n} u_p v_q.$$

Étape 1. Cas des séries à termes positifs.
Grâce aux inclusions $I_n \subset J_n \subset I_{2n}$ on a

$$\sum_{(p,q)\in I_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q)\in J_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q)\in I_{2n}} u_p v_q.$$

Ceci implique

$$U_n V_n \leq W_n \leq U_{2n} V_{2n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Puisque les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Donc d'après ł'inégalité (2.7) et le théorème d'encadrement la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_p v_q\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Étape 2. Cas des séries à termes quelconques.
Les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont absolument convergentes, on en déduit la convergence de la série produit des séries $\sum_n |u_n|$ et $\sum_n |v_n|$, et on a

$$|w_n| = \left|\sum_{p+q=n} u_p v_q\right| \leq \sum_{p+q=n} |u_p||v_q|.$$

D'où la convergence absolue de la série $\sum_n w_n$ d'après la règle de comparaison.

Maintenant on va montrer l'égalité (2.6).
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n V_n - W_n = \sum_{(p,q)\in I_n} u_p v_q - \sum_{(p,q)\in J_n} u_p v_q = \sum_{(p,q)\in I_n\setminus J_n} u_p v_q.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|U_n V_n - W_n| &= \left|\sum_{(p,q)\in I_n\setminus J_n} u_p v_q\right| \\
&\leq \sum_{(p,q)\in I_n\setminus J_n} |u_p||v_q| \\
&= \sum_{(p,q)\in I_n} |u_p||v_q| - \sum_{(p,q)\in J_n} |u_p||v_q| \\
&= \left(\sum_{p=0}^{n} |u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{n} |v_q|\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k} |u_p||v_q|\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} U_nV_n - W_n = 0$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

□

2.4.5 Utilisation des développements limités

Maintenant on va introduire la technique du développement limité pour étudier la convergence d'une série à termes quelconques dans le cas où les résultats précédentes ne s'applique pas.

Exemple 2.15. *Étudions la convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. *On utilise le développement limité de la fonction* $\dfrac{1}{1+x}$ *au voisinage de* 0.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\varepsilon(x) \quad \textit{tel que} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} \\
&= \frac{(-1)^n}{n}\left[1-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).
\end{aligned}$$

Donc la série donnée est convergente comme somme de trois séries convergentes : la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ *est la série harmonique alternée (Page 22), la série* $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann, et la série* $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ *est absolument convergente.*

Exemple 2.16. *Déterminons la nature de la série* $\displaystyle\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
En utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, *on trouve :*

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

On conclut la série étudiée est divergente car le deuxième terme est le terme général de la série de Riemann.

2.5 Regroupement de termes d'une série

Théorème 2.22. *Soient $\sum_n u_n$ une série numérique, $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, et $\sum_n v_n$ une série numérique définie par :*

$$v_0 = \sum_{k=0}^{\phi(0)} u_k, \quad \text{et } v_n = \sum_{k=\phi(n-1)+1}^{\phi(n)} u_k, \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

1. *Si la série $\sum_n u_n$ converge alors la série $\sum_n v_n$ converge et ces deux séries ont même somme.*
2. *Si la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs et si la série $\sum_n v_n$ converge alors la série $\sum_n u_n$ converge et ces deux séries ont même somme.*

Démonstration.

1. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles associées aux séries $\sum_n u_n$ $\sum_n v_n$ respectivement.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k = U_{\phi(n)},$$
donc la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si la série $\sum_n u_n$ converge de somme U, alors la suite des sommes partielles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans ce cas la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers la même limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc la série $\sum_n v_n$ est convergente de somme égale à U.
2. Supposons que la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs. Si la série $\sum_n v_n$ converge de somme égale V, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée (c'-à-d. $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_n \leq M$). De plus les deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes. Comme l'application ϕ est strictement croissante, $\phi(n) \geq n$. Alors, on a
$$U_n \leq U_{\phi(n)} = V_n \leq M.$$
On en conclut que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est croissante majorée, et par conséquent les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont même somme U. □

Remarque 2.7.

1. *La série $\sum_n v_n$ est dite série déduite de $\sum_n u_n$ par regroupement des termes ou (sommation par paquets).*
2. *La réciproque de l'assertion* 1. *est fausse.*

Exemple 2.17. *Soit $u_n = (-1)^n$ et et $\phi(n) = 2n$. Alors on a*

$$\sum_n v_n = \underbrace{1-1}_{v_0} + \underbrace{1-1}_{v_1} + \underbrace{1-1}_{v_2} + \cdots + \underbrace{1-1}_{v_n} + \cdots$$

la série $\sum_n v_n$ *est convergente (série nulle) alors que* $\sum_n (-1)^n$ *diverge.*

Théorème 2.23. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et s'il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(n+1) - \phi(n) \leq m,$$

alors les séries $\sum_n u_n$ *et* $\sum_n v_n$ *sont de même nature.*

Démonstration. Voir Guinin-Joppin [10] la page 65. □

Exemple 2.18. *Soit* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ *pour* $n \geq 2$, *et on prend* $\phi(n) = 2n+1$. *On a* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et pour tout* $n \geq 2$, $\phi(n+1) - \phi(n) = 2$.
On va étudier maintenant la série $\sum_n v_n$ *telle que*

$$\begin{aligned} v_n = \sum_{k=\phi(n-1)+1}^{\phi(n)} u_k &= \sum_{k=2n-1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)}. \end{aligned}$$

Comme $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *on déduit que la série* $\sum_n v_n$ *est convergente d'après la règle d'équivalence. Cela implique la convergence de* $\sum_n u_n$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre on considère I une partie de $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$f_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f_n(x) \end{array}$$

3.1 Suites de Fonctions

Définition 3.1 (**Convergence simple**)**.** On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **simplement convergente** (ou **converge simplement**) vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x) - f(x))$ converge vers 0. On écrit

$$\forall x \in I, \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

$$\forall x \in I, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

f est appelée limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I. On note $f_n \xrightarrow[I]{\text{cvs}} f$.

Remarque 3.1. *On remarque que l'entier n_0 dépend à la fois du choix du ε et du point x de I.*

Exemple 3.1. *On considère la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.*
On a, pour tout $x \in [0, 1[$ on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, et $f_n(1) = 1$.
Donc la suite $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{cvs} f$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x \in [0, 1[\\ 1, & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

Exemple 3.2. *Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.*
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente vers $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2. *Le premier exemple montre que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas continue en général.*

Définition 3.2. L'application

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_\infty : & \mathcal{B}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|\,, \end{array}$$

est une norme sur l'espace $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$), on l'appelle **norme de la convergence uniforme**.

Définition 3.3 (**Convergence uniforme**)**.** On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur I si $\|f_n - f\|_\infty$ converge vers zéro. On écrit

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

La fonction f est dite **limite uniforme** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.3. *Étude de la convergence uniforme de la suite définie par*

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n(1-x) \end{array}$$

On a pour tout $x \in [0,1]$ $\lim_{n\to+\infty} x^n(1-x) = 0$*, donc* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *vers la fonction nulle.*
Maintenant on va calculer $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$*, on étudie les variations de* $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ *sur* $[0,1]$.
La fonction g_n *est dérivable pour tout* $x \in [0,1]$ *et*

$$g_n'(x) = x^{n-1}\Big(n - (n+1)x\Big),$$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0

Donc la fonction g_n *admet un maximum au point* $x = \frac{n}{n+1}$*, c'est-à-dire*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

On sait que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$*. Or* $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, donc la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente vers zéro sur* $[0,1]$.

Proposition 3.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions converge simplement sur I vers une fonction f. Si il existe une suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive de limite égale à 0 telle que*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \textit{pour tout} \quad x \in I. \tag{3.1}$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur I vers f.

Démonstration. De l'inégalité (3.1) on obtient

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ceci montre que $f_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} f$. □

Exemple 3.4. *On considère la suite de fonctions définie par : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f(x) = 0$.*
Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 3.3. *Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur une partie $I \subset \mathbb{R}$, il suffit de trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha_n, \ \textit{avec} \ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \neq 0.$$

Proposition 3.2. *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors elle converge simplement sur I.*

Démonstration. Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction f sur I, c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Pour tout $x \in I$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I. □

Définition 3.4. Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **uniformément de Cauchy** sur I si : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq n_\varepsilon$ et si $q \geq n_\varepsilon$ alors, $\sup\limits_{x\in I} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$.

Proposition 3.3 (Critère de Cauchy de convergence uniforme). *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite uniformément convergente si et seulement si elle est uniformément de Cauchy.*

Démonstration. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, on écrit

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité triangulaire entraîne que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq q \geq n_0$

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy.

Réciproquement, on suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy. On a pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle converge vers $f(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ (q \geq p \geq n_0) \Rightarrow (|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon).$$

En faisant tendre q vers l'infini, on obtient $|f_p(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour $p \geq n_0$, Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. □

Théorème 3.4 (Continuité). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Si :*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur I.*

Alors f est continue sur I.

Démonstration. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.2}$$

Comme f_n est continue sur I, donc pour tout $x_0 \in I$

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta,\ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

On va montrer que $|f(x) - f(x_)| < \varepsilon$. On a pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta$, et pour tout $n \geq n_0$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Donc, f est continue en x_0. □

Remarque 3.4. *Ce résultat est souvent utile sous forme contraposée : si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction discontinue, la convergence n'est pas uniforme.*

Exemple 3.5. *Dans l'exemple 3.1 on voit que $f_n(x) = x^n$ est continue sur $[0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \neq 1 \\ 1 & si\ x = 1, \end{cases}$$

n'est pas continue en 1.

Théorème 3.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction f sur I, alors pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I, la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers* 0.

Démonstration. Résulte des inégalités

$$f_n(x_n) - f(x_n) \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \quad \text{pour rour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Remarque 3.5. *Pour montrer qu'une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément vers une fonction* f *sur une partie* $I \subset \mathbb{R}$ *on essaiera de trouver une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* I *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$.

Exemple 3.6. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donnée par :* $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ *converge simplement vers* 0 *sur* $[0, +\infty[$.
Par contre, la convergence n'est pas uniforme. En effet on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = ne^{-1}$ *ne tend pas vers* 0.

Théorème 3.6 (Heine[1]. Convergence uniforme et intégration). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions réelles. Si*

1. $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{cvu} f$, *et*
2. *les* f_n *sont continues sur* $[a, b]$.

Alors f *est intégrable sur* $[a, b]$ *et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et les f_n continues sur $[a, b]$, alors f est continue, donc intégrable sur le segment $[a, b]$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x)dx - f(x)|\, dx \\ &\leq (a-b) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Comme $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit directement le résultat. □

Remarque 3.6. *Le théorème précédent n'est plus valable si les intervalles ne sont pas des segments (intervalles fermés bornés).*

Exemple 3.7. *On considère la suite de fonctions* $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & si\ x \in [0, n], \\ 0, & sinon. \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, *d'où* $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvs} 0$.
On voit que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *c'est-à-dire que* $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} 0$ *alors que* $\displaystyle\int_R f_n(x) = 1$ *ne converge pas vers* 0.

Théorème 3.7 (Convergence uniforme et dérivation). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de classe* C^1 *sur* I. *On suppose que :*

1. $f_n \xrightarrow[I]{cvs} f$
2. $f_n' \xrightarrow[I]{cvu} g$.

Dans ces conditions, la suite $f_n \xrightarrow[I]{cvu} f$ *et* $f \in C^1$ *sur* I *telle que*

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

1. Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand.

Démonstration. Soit $a \in I$ fixé, et $f_n \in C^1$ sur I. On a pour tout $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt.$$

On note $h_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$, le théorème 3.4 implique la convergence uniforme de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout segment de I vers la fonction

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

g est continue sur I puisque les f_n' sont continues et converge uniformément sur I, donc f est de classe C^1 sur I et $f' = g$. □

Remarque 3.7. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions uniformément convergente sur I n'implique pas que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi uniformément sur I.*

Exemple 3.8. *Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$ sur $\mathbb{R}$.*

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (car la fonction $\sin$ bornée et $\dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle. En revanche la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge même pas simplement.

Théorème 3.8 (Premier théorème de Dini[2]). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$. Si*

1. *$f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{cvs} f$, et*
2. *pour tout $x \in [a,b]$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*

Si f est continue, alors $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{cvu} f$.

Théorème 3.9 (Deuxième théorème de Dini). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues croissantes sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si*

1. *$f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{cvs} f$, et*
2. *f est continue sur $[a,b]$,*

alors la converge de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a,b]$.

Pour les preuves des théorèmes précédents voir [8] page 228 et [12] page 74.

3.2 Séries de Fonctions

Définition 3.5. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions, on lui associe une nouvelle suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad \text{pour} \qquad n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in I.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite de sommes partielles de la série de fonctions $\sum\limits_n f_n(x)$.

On appelle **série de fonctions** de terme général $f_n(x)$ et on note $\sum\limits_n f_n(x)$ le couple $\Big((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$.

2. Ulisse Dini (1845 - 1918), mathématicien italien.

Définition 3.6. On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ **converge simplement** sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.
Autrement dit : la série $\sum_n f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$.
Si c'est le cas, on définit une nouvelle fonction S sur I donnée par

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La fonction S est appelée **somme de la série** $\sum_n f_n(x)$.

On appelle **ensemble** ou **domaine de convergence simple** de la série $\sum_n f_n(x)$ l'ensemble

$$\Big\{x \in I \ : \ \sum_n f_n(x) \text{ converge}\Big\}.$$

Exemple 3.9. *On considère la série de fonctions* $\sum_n \frac{e^{nx}}{n}$.
Les fonctions $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{n}$ *sont positives. On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} e^x = e^x$$

Danc d'après la règle de d'Alembert la série converge simplement si $e^x < 1$*, autrement dit le domaine de convergence simple est* $\mathbb{R}_-^*$.

Définition 3.7. On dit que la série $\sum_n f_n(x)$ **converge absolument** sur I si la série $\sum_n |f_n(x)|$ converge simplement pour tout $x \in I$.

Exemple 3.10. *Soit* $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^2+|x|}$ *une série de fonctions sur* $\mathbb{R}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2+|x|}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ *est convergente (série de Riemann), donc d'après la règle de comparaison la série donnée est absolument convergente sur* $\mathbb{R}$.

Définition 3.8. On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ est **uniformément convergente** sur I si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément sur I.

Proposition 3.10 ([11], page 316)**.** *Une série de fonctions* $\sum_n f_n$ *est uniformément convergente sur* I *si et seulement si :*

1. *la série* $\sum_n f_n$ *converge simplement sur* I*,*

2. la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers 0 sur I.

Exemple 3.11. *Montrons que la série $\sum_n (-1)^n \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$.*
Cette série est alternée, donc converge simplement car la suite $\frac{x^n}{n}$ est positive et décroissante vers 0 pour tout $x \in [0,1]$ (Théorème 2.20).
De l'inégalité (2.5) on obtient

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^k}{k} \right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ceci implique

$$\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la proposition 3.1 le reste $R_n \xrightarrow[{[0,1]}]{cvu} 0$. On en déduit que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Proposition 3.11 ([11], page 316)**.** *Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ est uniformément convergente sur I alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I.*

Définition 3.9. On dit que la série $\sum_n f_n(x)$ **converge normalement** sur I si et seulement si la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge tel que $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.

Exemple 3.12. *Étude de la convergence normale de la série de terme général $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2\ln(n)}$ sur $\mathbb{R}$ pour $n \geq 2$.*
La fonction cos *est bornée pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2\ln(n)}$. Comme la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2\ln(n)}$ est convergente (série de Bertrand), on conclut que la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 3.13. *On considère la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ telle que*

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Pour étudier la convergence normale on doit calculer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)|$.
La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$f_n'(x) = nx\big(2 - x\sqrt{n}\big)e^{-x\sqrt{n}}.$$

x	0		$\frac{2}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$	$\searrow$	0

On en déduit que $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}$.

La série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ *est grossièrement divergente, donc la série de fonctions* $\sum_n f_n(x)$ *ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3.12 (Critère de Weierstrass). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions sur* I. *S'il existe une suite réelle* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *positive telle que la série* $\sum_n \alpha_n$ *converge, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et tout* $x \in I$

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n, \tag{3.4}$$

alors la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ *converge normalement sur* I.

Démonstration. En utilisant l'inégalité (3.4) on obtient

$$\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n.$$

Puisque la série $\sum_n \alpha_n$ converge, donc d'après le critère de comparaison la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge, cela implique que la série $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur I. □

Exemple 3.14. *On considère la série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on a* $\left|\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *et la série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série de fonctions est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 3.13 (Critère d'Abel uniforme). *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

1. *Il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in I} \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq M$,
2. *Pour tout* $x \in I$ *la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
3. *La suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* I.

Alors, la série $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ *converge uniformément sur* I.

Démonstration. La démonstration est basée sur la transformation d'Abel (voir la page 20) □

Théorème 3.14 (Continuité). *Soit* $\sum_n f_n(x)$ *une série de fonctions sur* I *et* $x_0 \in I$*. Si*

1. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue en* x_0,
2. $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformément* I,

alors la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est continue en* x_0.

Démonstration. On applique le théorème 3.4 de la convergence uniforme et continuité à la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. □

Théorème 3.15 (Intégration). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions intégrables de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$*. Si la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformément sur* $[a, b]$.

Alors la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est intégrable sur* $[a, b]$*, et l'on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right).$$

Démonstration. On applique le théorème 3.6 de la convergence uniforme et intégration à la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. □

Théorème 3.16 (Dérivation). *Soit* $\sum_n f_n(x)$ *une série de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$*. Si*

1. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est de classe* C^1 *sur* I,
2. *la série* $\sum_n f_n(x)$ *converge simplement sur* I,
3. *la série* $\sum_n f_n'(x)$ *converge uniformément sur* I.

Alors la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est de classe* C^1 *sur* I*, et l'on a*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Démonstration. Appliquer le théorème 3.7 de la convergence uniforme et dérivation à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. □

Chapitre 4

Séries entières

Définition 4.1. Une **série entière** est une série de fonctions dont le terme général est de la forme $a_n z^n$ telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe et $z \in \mathbb{K}$. Les nombres a_n sont appelées les coefficients de la série entière.
Cette série sera notée $\sum_n a_n x^n$ ou $\sum_n a_n z^n$.

Remarque 4.1.
1. *La série* $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ *est aussi une série entière.*
2. *La série* $\sum_n \frac{a_n}{z^n}$ *n'est pas une série entière.*
3. *L'utilisation de la notation* x *(resp.* z*) pour la variable signifiera le cas réelle (resp. complexe).*

Exemple 4.1.
1. *Les polynômes sont des séries entières.*
2. *La série géométrique* $\sum_n z^n$ *est une série entière.*
3. *La série de Taylor d'une fonction en un point* x_0, $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ *est une série entière.*

Notation. Soit $r \geq 0$, on note
1. Le disque ouvert de centre 0 et de rayon r : $D(0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < r\}$ pour $r > 0$.
2. Le disque fermé de centre 0 et de rayon r : $\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r\}$.
3. Le cercle de centre 0 et de rayon r : $C(0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = r\}$.

Maintenant, on s'intéresse à la convergence simple, c'est-dire l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_n a_n z^n$ converge.

Définition 4.2. On appelle **domaine de convergence** d'une série entière $\sum_n a_n z^n$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_n a_n z^n$ converge.

Lemme 4.1 (Lemme d'Abel). *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *une série entière. Si il existe* z_0 *un complexe non nul, tel que la suite de terme général* $a_n z_0^n$ *est bornée, alors la série entière* $\sum_n a_n z^n$ *est absolument convergente sur le disque ouvert* $D(0, |z_0|)$.

Démonstration. On suppose que la suite de terme général $a_n z_0^n$ est bornée, c'est-à-dire

$$\exists M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z_0^n| \leq M.$$

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n} \right| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq M \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right|.$$

Pour tout $z \in D(0, |z_0|)$ la série de terme général $\left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ est une série géométrique de de raison $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$, elle est donc convergente. Le règle de comparaison 2.8 implique que la série $\sum_n |a_n z^n|$ converge. □

4.1 Rayon de convergence

On considère l'ensemble

$$E = \{ r \in \mathbb{R}_+ \ / \ \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \}. \tag{4.1}$$

Remarque 4.2. *L'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ (il contient 0).*

Définition 4.3 (Rayon de convergence). On appelle **rayon de convergence** d'une série entière $\sum_n a_n z^n$ la borne supérieur dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ de l'ensemble E.

Définition 4.4 (Disque de convergence). Soit $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul et fini. L'ensemble $\mathcal{D} = D(0, R) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R \}$ est appelé **disque ouvert de convergence** de la série $\sum_n a_n z^n$.

Dans le cas réel le disque de convergence n'est autre que l'intervalle ouvert $] - R, R[$, il sera appelé **intervalle ouvert de convergence**.

Théorème 4.2. *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum_n a_n z^n$. Alors*

1. *Pour tout $z \in D(0, R)$ la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.*
2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ la série $\sum_n a_n z^n$ diverge.*

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ il existe un réel r tel que $|z| < r < R$. Alors r appartient à l'ensemble E (4.1), c'est-à-dire, il existe un réel M tel que $|a_n z^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le lemme d'Abel 4.1 la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert de la convergence.

Supposons que $|z| > R$. Alors $|z| \notin E$ ce qui implique que la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, par conséquent la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (le condition nécessaire n'est pas vérifiée, voir la proposition 2.3), on en déduit que la série $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement. □

Remarque 4.3. *On peut avoir $R = 0$ ou $R = +\infty$.*

1. *Si $R = 0$, le domaine de convergence $\mathcal{D} = \{0\}$ (c'est à dire la série $\sum_n a_n z^n$ converge seulement pour $z = 0$), et dans le cas $R = +\infty$, $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ (c'est-à-dire la série $\sum_n a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$).*
2. *Si $|z| = R$, on ne peut rien conclure.*

Exemple 4.2 (Série géométrique). *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La série géométrique $\sum_n \lambda^n z^n$ converge si $|\lambda z| < 1$ et diverge si $|\lambda z| \geq 1$, donc la série $\sum_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = \dfrac{1}{|\lambda|}$ et pour domaine de convergence $\mathcal{D} = D\big(0, \frac{1}{|\lambda|}\big)$, et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n z^n = \frac{1}{1 - \lambda z}, \qquad \textit{pour} \quad |z| < \frac{1}{|\lambda|}.$$

Exemple 4.3 (Série exponentielle). *La série $\sum_n \dfrac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ donc domaine de convergence $\mathcal{D} = \mathbb{C}$, et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \qquad \textit{pour tout} \quad z \in \mathbb{C}.$$

4.2 Détermination du rayon de convergence

Théorème 4.3 (Règle de D'Alembert). *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.*
Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors le rayon de convergence

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \textit{si} \quad 0 < \ell < +\infty, \\ 0 & \textit{si} \quad \ell = +\infty, \\ +\infty & \textit{si} \quad \ell = 0. \end{cases}$$

Démonstration. On applique la règle de d'Alembert 2.12 pour les séries à termes positifs à la série $\sum_n |a_n z^n|$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell |z|.$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ la série $\sum_n |a_n z^n|$ converge (resp. diverge) si $\ell|z| < 1$ (resp. $\ell|z| > 1$) et donc $|z| < \dfrac{1}{\ell}$ (resp. $|z| > \dfrac{1}{\ell}$). Il en résulte que le rayon de convergence $R = \dfrac{1}{\ell}$.
Par convention si $\ell = 0$, le rayon de convergence est infini $R = +\infty$, et si $\ell = +\infty$, on a $R = 0$. □

Exemple 4.4. *Calculons le rayon de convergence de la série entière*

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.
Nous avons
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$
Donc le rayon de convergence $R = 1$*, et la série est absolument convergente sur* $\mathcal{D} =]-1,1[$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.
On a
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0.$$
Donc le rayon de convergence $R = +\infty$*. La série converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$*.*

Remarque 4.4. *On ne peut pas appliquer la règle de D'Alembert si une infinité de termes s'annulent. Par exemple*
$$u_n = \begin{cases} n & \textit{si } n \textit{ pair} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ impair.} \end{cases}$$

Théorème 4.4 (Règle de Cauchy). *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ *avec* $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$*, alors le rayon de convergence*
$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \textit{si } 0 < \ell < +\infty, \\ 0 & \textit{si } \ell = +\infty, \\ +\infty & \textit{si } \ell = 0. \end{cases}$$

Démonstration. On applique la règle de Cauchy 2.13 à la série $\sum_n |a_n z^n|$ on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \ell|z|,$$
donc la série entière $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente lorsque $\ell|z| < 1$ et ne converge pas absolument si $\ell|z| > 1$. Il en résulte que le rayon de convergence $R = \frac{1}{\ell}$. □

Exemple 4.5. *Déterminons le rayon de convergence de la série entière*

1. $\sum_n \frac{z^n}{\lambda^n}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
On a
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\lambda^n}\right|} = \frac{1}{|\lambda|},$$
et alors le rayon de convergence $R = |\lambda|$*.*
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^{\ln(n)}}$.
D'après le théorème précédent on a
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{(\ln(n))^2}{n}} = 0.$$
Donc le rayon de convergence $R = +\infty$*.*

Remarque 4.5. *Le rayon de convergence de la série* $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ *est par définition le même rayon de la série* $\sum_n a_n z^n$. *Par contre le domaine ouvert de convergence* $\mathcal{D} = D(x_0, R)$ *dans le cas complexe, et* $\mathcal{D} =]x_0 - R, x_0 + R[$ *dans le cas réel.*

Exemple 4.6. *Déterminons le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-2)^n}{n5^n}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}$. *Donc le rayon de convergence* $R = 5$ *et l'intervalle ouvert de convergence* $\mathcal{D} =]-3, 7[$.

Proposition 4.5. *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *et* $\sum_n b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b.
(i) Si $|a_n| \leq |b_n|$ *alors* $R_a \geq R_b$.
(ii) Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ *alors* $R_a = R_b$.

Démonstration.
(i) Soit $z \in \mathbb{C}$, alors si $|a_n| \leq |b_n|$ on a

$$|a_n z^n| = |a_n||z^n| \leq |b_n||z^n| = |b_n z^n|.$$

Si $|z| < R_b$ la série $\sum_n |b_n z^n|$ converge, en utilisant la règle de comparaison (Théorème 2.8) on obtient la convergence de la série $\sum_n |a_n z^n|$, ce qui implique que $R_a \geq R_b$.

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$, si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ on a

$$|a_n z^n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n z^n|.$$

Donc les deux séries $\sum_n |a_n z^n|$ et $\sum_n |b_n z^n|$ sont de même nature d'après la règle d'équivalence (Théorème 2.10), alors $R_a = R_b$. □

Exemple 4.7. *On considère la série*

1. $\sum_n \sin(n) z^n$.
   On a $|\sin(n)z^n| \leq |z^n|$. *La série* $\sum_n z^n$ *est une série géométrique de rayon de convergence égal* 1. *Donc la proposition précédente implique que le rayon de convergence* R *de la série* $\sum_n \sin(n)z^n$ *vérifie* $R \geq 1$.
   On suppose que $R > 1$, *alors la suite* $|\sin(n)z^n|$ *ne converge pas vers* 0 *pour* $|z| > 1$, *en on déduit que* $R = 1$.
2. $\sum_n \frac{n^2}{1+n^2} z^n$.
   On a $\frac{n^2}{1+n^2} \underset{+\infty}{\sim} 1$ *donc la série entière* $\sum_n \frac{n^2}{1+n^2} z^n$ *est équivalente à la série géométrique* $\sum_n z^n$, *d'où le rayon de convergence* $R = 1$.

Théorème 4.6. *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *non nul. La série* $\sum_n a_n z^n$ *converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé* $\overline{D}(0,r)$ *avec* $0 < r < R$.

Démonstration. Puisque $r < R$, il existe $z_0 \in \mathbb{K}$ tel que $r < |z_0| < R$. La série numérique $\sum_n |a_n z_0^n|$ est convergente d'après le théorème 4.2.
Pour tout $|z| \leq r$ on a

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n|.$$

Ceci implique

$$\sup_{|z|<r} |a_n z^n| \leq |a_n z_0^n|,$$

donc le critère de Weierstrass 3.12 entraîne la convergence normale de la série entière $\sum_n a_n z^n$ pour tout $|z| < r$. □

4.3 Opérations algébriques sur les séries entières

Théorème 4.7. *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *le rayon de convergence de la série* $\sum_n \lambda.a_n z^n$ *est* R.

Remarque 4.6. *Si* $\lambda = 0$ *la série* $\sum_n \lambda.a_n z^n$ *converge pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 4.8. *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *et* $\sum_n b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*. Si* R *est le rayon de convergence de la série somme* $\sum_n (a_n + b_n) z^n$*, alors*

1. $R \geq \min(R_a, R_b)$ *;*
2. *si* $R_a \neq R_b$*, alors* $R = \min(R_a, R_b)$.

Et pour tout $z \in \mathbb{K}$ *tel que* $|z| \leq \min(R_a, R_b)$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration.

1. Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| <$. Chacune des séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ converge, donc la proposition 2.6 entraîne la convergence de la série somme $\sum_n (a_n + b_n) z^n$, de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

2. Supposons que $R_a < R_b$, donc pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $R_a < |z| < R_b$ la série $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est divergente comme somme d'une série convergente et une série divergente, ce qui implique que $R = \min(R_a, R_b)$. □

Exemple 4.8. *Déterminons le rayon de convergence de la série entière* $\sum_n \left(\frac{1}{2^n} + 3^n\right) z^n$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. *Remarquons que la série* $\sum_n \left(\frac{1}{2^n} + 3^n\right) z^n$ *est la somme de deux séries géométriques* $\sum_n \left(\frac{z}{2}\right)^n$ *et* $\sum_n (3z)^n$ *convergent respectivement si* $|z| < 2$ *et* $|z| < \frac{1}{3}$. *Donc d'après le théorème précédent le rayon de convergence de la série somme* $R = \min(\frac{1}{3}, 2) = \frac{1}{3}$.

Théorème 4.9. *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *et* $\sum_n b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectifs* R_a *et* R_b. *On note* R *le rayon de convergence de la série entière produit*[1] $\sum_n w_n z^n$ *telle que* $w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Alors* R *vérifie*

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, *on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ sont absolument convergentes. En utilisant le produit de Cauchy (Théorème 2.21), la série $\sum_n w_n z^n$ est absolument convergente de série absolument convergente, donc le rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$. □

4.4 Propriétés de la somme d'une série entière

4.4.1 Continuité

Théorème 4.10 (Continuité). *La somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *d'une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *est une fonction continue sur le disque ouvert de convergence.*

Démonstration. Soit $z_0 \in D(0, R)$. il existe $0 < r < R$ tel que $|z_0| < r < R$. La série $\sum_n a_n z^n$ est uniformément convergente sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$ (d'après le théorème 4.6), de plus la fonction $z \longmapsto a_n z^n$ est continue sur $\overline{D}(0, r)$. Donc le théorème 3.4 implique que la somme de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est continue sur $\overline{D}(0, r)$, en particulier en tout $z_0 \in D(0, R)$. □

4.4.2 Dérivation

Définition 4.5. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réel. On appelle :

1. **série dérivée première** la série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ ou $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$.

1. Produit de Cauchy voir la définition 2.11

2. **série dérivée deuxième** la série

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

3. **série dérivée d'ordre** k pour $k \in \mathbb{N}^*$ la série

$$\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}x^n.$$

Théorème 4.11. *Une série entière* $\sum_n a_n x^n$ *et ses dérivées admettent le même rayon de convergence.*

Démonstration. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Appliquons la règle de Cauchy (Théorème 4.4) sur la série dérivée première $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell.$$

Donc le rayon de convergence de la série dérivée est R.
Pour la dérivé d'ordre $k \geq 2$, appliquons la règle de d'Alembert (Théorème 4.3). □

Théorème 4.12. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: &]-R,R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

est de classe C^1 *et*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \quad \textit{pour tout} \quad x \in]-R,R[.$$

Démonstration. La série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est simplement convergente sur $]-R,R[$. La fonction $x \longmapsto a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R,R[$. De plus, la série dérivée $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R, donc elle converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de $]-R,R[$ (d'après le théorème 4.6).
D'après le théorème 3.16, on obtient le résultat. □

Corollaire 4.13. *Plus généralement, la somme* f *est de classe* C^∞ *sur* $]-R,R[$, *et pour tout* $x \in]-R,R[$ *on a*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}x^n.$$

4.4.3 Intégration

Définition 4.6. On appelle **série entière primitive** d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série de terme général $\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, et on note $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

Théorème 4.14. *Une série série entière $\sum_n a_n z^n$ et sa série primitive ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. Même raisonnement du théorème 4.11. □

Théorème 4.15. *Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors on a*

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Démonstration. La série $\sum_n a_n x^n$ est uniformément convergente sur tout segment délimité par 0 et x. Donc d'après le théorème 3.15, on a

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_0^x t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

□

Corollaire 4.16. *La somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet comme primitive sur $]-R, R[$ les fonctions $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + c$ pour $c \in \mathbb{R}$.*

4.5 Développement en série entière

Dans cette section on considère seulement le cas réel.

Définition 4.7. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de 0 est **développable en série entière** (en abrégé "DSE") en 0 si il existe une série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence R strictement positif et un voisinage V de 0 tels que :

$$\forall x \in V, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Définition 4.8. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de x_0 est DSE en x_0 si $f(x + x_0)$ est DSE à l'origine, c'est-à-dire : il existe une série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence R strictement positif et un voisinage V de x_0 tels que :

$$\forall x \in V, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Exemple 4.9. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on considère la fonction*

$$x \longmapsto \frac{1}{1-x},$$

qui représente la somme de la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$, (c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$).
Donc la fonction $\frac{1}{1-x}$ est développable en série entière en zéro.

Théorème 4.17 (Condition nécessaire). *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction DSE au voisinage 0, alors f est de classe C^∞ sur une voisinage de 0. Dans ce cas*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Démonstration. Soit V une voisinage de 0. D'après le corollaire 4.13 la fonction f est de classe C^∞ sur V. De plus, on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \quad \text{pour tout} \quad x \in V,$$

en particulier

$$f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

□

Remarque 4.7.

1. *Une fonction DSE en 0 est la somme de sa série de Taylor dans un voisinage de 0.*
2. *Il existe des fonctions de classe C^∞ au voisinage de zéro qui ne sont pas DSE en zéro.*

Exemple 4.10. *On considère la fonction suivante*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

On vérifie par récurrence que cette fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée d'ordre n

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0, \end{cases}$$

où P_n est polynôme en x dépendant de n.
La fonction f n'est pas DSE en 0 car la série de Taylor est nulle, alors que f ne s'annule qu'en 0.

Corollaire 4.18 (L'unicité de DSE). *Soient $\sum_n a_n x^n$, $\sum_n b_n x^n$ deux série entière et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad pour\ tout \quad x \in]-r, r[. \tag{4.2}$$

Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. On note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Donc d'après le théorème 4.17 on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

D'après (4.2) on a $f = g$ sur $]-r, r[$, ceci implique l'égalité $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$. □

Théorème 4.19 (**Condition suffisante**)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. S'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que f soit de classe C^∞ sur $]-r, r[$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r, r[, \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M,$$

alors f est DSE au voisinage de zéro.

Démonstration. Pour montrer le théorème il suffit de prouver que le reste du développement en série de Taylor de f converge vers zéro.
Soit $R_n(f)$ la fonction définie sur $]-r, r[$ par

$$R_n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Comme f est de classe C^∞, elle est développable en série de Taylor au voisinage de zéro, on déduit que

$$|R_n(f)(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(0)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq M \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit $u_n = \dfrac{r^n}{n!}$, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est convergente d'après le critère de d'Alembert, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Donc, on peut conclure que la fonction f est DSE en zéro. □

Exemple 4.11. *Soit $f(x) = \sin(x)$. On sait que $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, donc $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
Le résultat précédent entraîne que f est DSE en 0, et on a

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

De même manière, on peut montrer que :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.6 Développements usuels

f	R	f	R
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1
$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$+\infty$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad R = 1 \text{ ou } (+\infty \text{ si } \alpha \in \mathbb{N}).$$

4.7 Équations différentielles et développement en série entière

Dans cette section on va chercher les solutions développables en série entière pour des équations différentielles linéaires.

Exemple 4.12. *On considère l'équation différentielle*

$$y' - y = 0 \tag{4.3}$$

On cherche une solution de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *et on note* R *son rayon de convergence. La fonction* y *est est dérivable sur* $]-R, R[$ *et on a*

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

Nous avons

$$y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1) a_{n+1} - a_n \Big) x^n.$$

La fonction y est solution de l'équation (4.3) si et seulement si les coefficients a_n vérifient

$$(n+1) a_{n+1} - a_n = 0 \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N},$$

ce qui équivaut à :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

on en déduit

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}, \cdots$$

par récurrence on montre que $a_n = \frac{a_0}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc la solution de l'équation (4.3) est donnée par

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x.$$

Exemple 4.13. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + xy' + y = 1. \tag{4.4}$$

Cherchons une solution développable en série entière de cette équation qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$. *Soient* $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *et* R *le rayon de convergence de* f. *Pour tout* $x \in]-R, R[$ *on a*

$$xy'(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n.$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

En reportant les séries précédentes dans l'équation (4.4), *on obtient :*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n \Big) x^n &= 1 \\ 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n \Big) x^n &= 1. \end{aligned}$$

Par l'unicité du DSE (Corollaire 4.18), on obtient

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 1, \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n = 0, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

On obtient la relation de récurrence :

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}, \quad \forall n \geq 1.$$

On a $y(0) = a_0 = 0$ *et* $y'(0) = a_1 = 0$. *En on déduit que tous les termes impairs* a_{2n+1} *sont nuls ; et*

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{2n} = (-1)^2 \frac{a_{2(n-2)}}{2^2 n(n-1)} = \cdots \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} \text{ pour tout } n \geq 1, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}.$$

Chapitre 5

Séries de Fourier

5.1 Fonctions continues et C^1 par morceaux

Définitions 5.1. Soit la subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, et soit la fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f est dite **continue par morceaux** sur $[a, b]$ si elle est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ et les limites $\lim\limits_{x \to x_i^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_{i+1}^-} f(x)$ existent.
2. On dit que f est de classe C^1 **par morceaux** si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :
   (a) f est de classe C^1 sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.
   (b) La fonction f et sa dérivée f' possèdent une limite à droite de x_i et à gauche de x_{i+1}.

Notation. On note

$$\lim_{x \to x_i^+} f(x) = f(x_i^+), \qquad \lim_{x \to x_{i+1}^-} f(x) = f(x_{i+1}^-).$$

$$\lim_{x \to x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i^+), \qquad \lim_{x \to x_{i+1}^-} \frac{f(x) - f(x_{i+1})}{x - x_{i+1}} = f'(x_{i+1}^-).$$

Remarque 5.1.

1. *Les limites à droite et à gauche de f et sa dérivée ne sont pas nécessairement égales.*
2. *La dérivée d'une fonction de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ est bornée.*

5.2 Fonctions périodiques

Définition 5.2. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue par morceaux est dite périodique s'il existe un nombre réel ω, tel que

$$f(x + \omega) = f(x), \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Le plus petit réel ω strictement positif tel que l'on ait (5.1) s'appelle la **période** de la fonction f.

Remarque 5.2. *Si f est une fonction périodique de période T_1, alors*

$$g(x) = f\left(\frac{T_1 x}{T_2}\right)$$

est une fonction périodique de période T_2.

En effet
$$g(x+T_2) = f\left(\frac{T_1(x+T_2)}{T_2}\right) = f\left(\frac{T_1 x}{T_2} + T_1\right) = f\left(\frac{T_1 x}{T_2}\right) = g(x).$$

Propriété 5.2.1. Soit f une fonction $T-$périodique. Alors
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Démonstration. La relation de Chasles permet d'écrire
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$
Le changement de variable $y = x - T$ conduit à l'égalité
$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(x)dx.$$
D'où le résultat recherché. □

5.3 Séries trigonométriques

Définition 5.3. Une **série trigonométrique** est une série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ telle que :
$$f_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x), \tag{5.2}$$
avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $b_0 = 0$, et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
La somme partielle d'ordre n de la série trigonométrique est :
$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\Big).$$
Dans le cas de convergence, la somme de la série trigonométrique est donnée par :
$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\Big). \tag{5.3}$$
En utilisant les relations d'Euler [1]
$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \qquad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}.$$
On obtient
$$f_n(x) = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\omega x} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-in\omega x}.$$
Pour $n \geq 0$, on note
$$c_0 = a_0, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \text{et} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

1. Leonhard EULER (1707 - 1783), mathématicien suisse.

On obtient

$$a_0 = c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad \text{et} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Alors une série trigonométrique peut s'écrire sous **la forme complexe**

$$c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} \right) \quad \text{ou} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

La suite des sommes partielles d'ordre n s'écrie

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}, \tag{5.4}$$

et en cas de convergence on note :

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}. \tag{5.5}$$

Remarque 5.3.

1. *Les nombres a_0, a_n et b_n sont appelés **coefficients de Fourier trigonométriques**.*
2. *Le nombre complexe c_n est appelé **coefficient de Fourier exponentiel**.*
3. *Les coefficients complexes d'indices opposés sont conjugués ($c_{-n} = \overline{c_n}$).*

Proposition 5.1. *Si les deux séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ convergent absolument, alors :*

1. *La série de terme général* (5.2) *converge normalement sur $\mathbb{R}$.*
2. *La somme S donnée par la formule* (5.3) *définit une fonction continue et périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.*
3. *Les coefficients de Fourier a_n, b_n s'expriment sous la forme :*
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(x) \cos(n\omega x),$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(x) \sin(n\omega x) dx.$$
4. *En notation complexe on a :*
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T S(x) e^{-in\omega x} dx$$

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.2. *Pour tous entiers n et m :*

$$\int_0^T \cos(n\omega x) \cos(m\omega x) dx = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

$$\int_0^T \cos^2(n\omega x) dx = \int_0^T \sin^2(n\omega x) dx = \frac{T}{2}.$$

$$\int_0^T \sin(n\omega x) \cos(m\omega x) dx = 0.$$

Démonstration. En utilisant les égalités suivantes :

$$\cos(n\omega x)\cos(m\omega x) = \frac{1}{2}\Big(\cos((n+m)\omega x) + \cos((n-m)\omega x)\Big).$$

$$\sin(n\omega x)\cos(m\omega x) = \frac{1}{2}\Big(\sin((n+m)\omega x) + \sin((n-m)\omega x)\Big).$$

$$\sin(n\omega x)\sin(m\omega x) = \frac{1}{2}\Big(\cos((n-m)\omega x) - \cos((n+m)\omega x)\Big).$$

□

Démonstration de la proposition 5.1.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

En on déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \Big| \leq |a_n| + |b_n|.$$

La série $\sum_n \Big(|a_n| + |b_n|\Big)$ est convergente d'après la proposition 2.6. Donc la série de terme général $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ converge. D'où la série $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. La somme S est continue d'après le théorème 3.14, en plus est $T-$périodique car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\cos\left(n\omega\Big(x + \frac{2\pi}{\omega}\Big)\right) = \cos\left(n\omega x + 2n\pi\right) = \cos(n\omega x).$$

$$\sin\left(n\omega\Big(x + \frac{2\pi}{\omega}\Big)\right) = \sin\left(n\omega x + 2n\pi\right) = \sin(n\omega x).$$

3. En intégrant l'expression (5.3) sur $[0, T]$, le théorème 3.15 nous permet de permuter sommation et intégrale

$$\int_0^T S(x)dx = a_0 \int_0^T dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \int_0^T \cos(n\omega x)dx + b_n \int_0^T \sin(n\omega x)dx \Big).$$

Nous avons alors

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(x)dx.$$

De même, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T S(x)\cos(m\omega x)dx &= a_0 \int_0^T \cos(m\omega x)dx \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \int_0^T \cos(n\omega x)\cos(m\omega x)dx \\ &+ b_n \int_0^T \sin(n\omega x)\cos(m\omega x)dx \Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T S(x)\sin(m\omega x)dx &= a_0\int_0^T \sin(m\omega x)dx \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\int_0^T \cos(n\omega x)\sin(m\omega x)dx \\ &+ b_n\int_0^T \sin(n\omega x)\sin(m\omega x)dx\Big).\end{aligned}$$

Le lemme 5.2 montre que les deux intégrales dans la somme sont nulles, sauf si $n = m$ dans les cosinus et sinus, ce qui donne le résultat.

4. On multiplie la formule (5.5) par $e^{-in\omega x}$ et on intègre sur $[0, T]$, on obtient :

$$\int_0^T S(x)e^{-in\omega x}dx = \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i(k-n)\omega x}\right) dx.$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème 3.15, on a :

$$\int_0^T S(x)e^{-in\omega x}dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\int_0^T e^{i(k-n)\omega x}dx.$$

Grâce à la relation suivante

$$\int_0^T e^{i(m-n)\omega x}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ T & \text{si } n = m, \end{cases}$$

on a

$$\int_0^T S(x)e^{-in\omega x}dx = Tc_n.$$

□

Remarque 5.4. *Comme la somme S est $T-$périodique on peut remplacer l'intégration sur $[0, T]$ par l'intégration sur n'importe quel intervalle de longueur T.*

Proposition 5.3. *Si les suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réelles, positives, décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (5.2) est*

1. *simplement convergente sur $\mathbb{R} - \{kT\}$,*
2. *uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[kT + \theta, (k + 1)T - \theta]$ pour $\theta \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. La preuve est une application de critère d'Abel 2.19 p. 21 pour la première proposition et le critère d'Abel uniforme 3.13 p. 37 pour la deuxième. □

5.4 Séries de Fourier

Définition 5.4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $T-$périodique et continue par morceaux. On appelle **série de Fourier**[2] associée à f la série trigonométrique :

$$a_0 + \sum_{n\geq 1}\Big(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\Big),$$

2. Joseph FOURIER (1768 - 1830), mathématicien français.

telle que :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx. \tag{5.6}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx\ , \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx. \tag{5.7}$$

En notation complexe, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ est définie par :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx. \tag{5.8}$$

L'expression

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\Big),$$

est appelée **le développement en série de Fourier** de f.

Exemple 5.1. *Soit f une fonction 2π-périodique telle que :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in]-\pi, 0], \\ x^2 & si\ x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

On calcule les coefficients de Fourier de f.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)dx.$$

Par double intégration par partie on trouve

$$a_n = (-1)^n\frac{2}{n^2}, \qquad b_n = (-1)^n\left(\frac{2}{\pi n^3} - \frac{\pi}{n}\right) - \frac{2}{\pi n^3}.$$

Proposition 5.4 (**Lemme de Riemann-Lebesgue** ([10] page 366))**.** *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$. On a*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_a^b f(x)e^{itx}dx = 0.$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)dx = \lim_{t\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin(tx)dx = 0.$$

Théorème 5.5 (**Propriétés des coefficients de Fourier**)**.**

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 0.$
2. *Si f est paire $b_n = 0$ et $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx.$*

3. *Si f est impaire $a_n = 0$ et $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx$.*

Démonstration.

1. C'est une conséquence directe du lemme de Riemann-Lebesgue 5.4.
2. Si f est paire alors la fonction $x \longmapsto f(x)\sin(n\omega x)$ est impaire pour tout $n \geq 1$, et alors

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx = 0.$$

En utilisant la relation de Chasles on obtient

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\cos(n\omega x)dx + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx\right).$$

Le changement de variable $y = -x$ donne

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\cos(n\omega x)dx = \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx.$$

D'où la formule donnée.

3. La démonstration est analogue pour le cas f impaire. On considère la fonction $x \longmapsto f(x)\cos(n\omega x)$.

□

Exemple 5.2. *On considère la fonction f, $2\pi-$périodique, telle que*

$$f(0) = f(-\pi) = 0 \quad \textit{et} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \textit{si } x \in]-\pi, 0[, \\ 1 & \textit{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

Comme f est impaire, on a : $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour $n \geq 1$ nous avons

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right).$$

D'où

$$b_n = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair}, \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & \textit{si } n \textit{ est impair}. \end{cases}$$

Donc la série de Fourier de f est :

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{2n+1}.$$

Remarque 5.5. 1. *Si f et paire, alors les c_n sont réels et $c_n = c_{-n}$.*

2. *Si f et impaire, alors les c_n sont imaginaires purs et $c_n = -c_{-n}$.*

Proposition 5.6 (Coefficients de Fourier d'une dérivée). *Soit f une fonction T-périodique et de classe C^1 par morceaux, alors :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{1}{in\omega}c_n(f')$.*

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n(f) = -\frac{1}{n\omega} a_n(f')$, $\qquad b_n(f) = \frac{1}{n\omega} b_n(f')$.

Démonstration.

1. Par intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx \\ &= \frac{1}{T} \left[-\frac{1}{in\omega} f(x) e^{-in\omega x} \right]_0^T + \frac{1}{in\omega} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx = \frac{1}{in\omega} c_n(f'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{n\omega} f(x) \sin(n\omega x) \right]_0^T - \frac{1}{n\omega} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx = -\frac{1}{n\omega} a_n(f'). \end{aligned}$$

□

5.5 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction T-périodique.

Définition 5.5. On appelle **noyau de Dirichlet** [3] d'ordre n, la fonction $D_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik\omega x} = 1 + 2 \sum_{k=0}^{n} \cos(k\omega x). \tag{5.9}$$

Remarque 5.6. *Le noyau de Dirichlet est une fonction paire, et elle est périodique de période* $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Proposition 5.7. *Soit* $S_n(x)$ *la somme partielle d'ordre* n *de la série de Fourier associée à* f*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$S_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \Big(f(x+s) + f(x-s) \Big) D_n(s) ds. \tag{5.10}$$

Démonstration. En utilisant l'écriture complexe (5.4) :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x} = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik\omega x} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-ik\omega s} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(s) \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik\omega(x-s)} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(s) D_n(x-s) ds = \frac{1}{T} \int_{-x}^{T-x} f(y+x) D_n(y) dy \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y+x) D_n(y) dy \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(y+x) D_n(y) dy + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y+x) D_n(y) dy \right) \end{aligned}$$

3. Peter Gustav LEJEUNE DIRICHLET (1805 - 1859), mathématicien allemand.

Par le changement de variable y en $-y$ on obtient

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(y+x)D_n(y)dy = \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x-y)D_n(y)dy.$$

Ce qui nous donne la formule (5.10). $\square$

Proposition 5.8. *Le noyau de Dirichlet D_n vérifie :*

1. $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T D_n(x)dx = 1.$
2. $D_n(x) = \dfrac{\sin\frac{(2n+1)\omega x}{2}}{\sin\frac{\omega x}{2}}$ *si* $x \neq kT$ *et* $D_n(x) = 2n+1$ *si* $x = kT$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

1. On intègre l'expression (5.9) on obtient le résultat.
2. Si $x = kT$ on a :

$$D_n(kT) = 1 + 2\sum_{i=-n}^{n} \cos(i\omega kT) = 1 + \sum_{i=-n}^{n} \cos(2ik\pi) = 2n+1.$$

Si $x \neq kT$, d'après la formule (5.9), D_n est la somme des $2n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\omega x}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega x} = e^{-in\omega x}\frac{1-e^{i(2n+1)\omega x}}{1-e^{i\omega x}} \\ &= e^{-in\omega x}\frac{e^{\frac{i(2n+1)\omega x}{2}}}{e^{\frac{i\omega x}{2}}}\frac{e^{-\frac{i(2n+1)\omega x}{2}} - e^{\frac{i(2n+1)\omega x}{2}}}{e^{-\frac{i\omega x}{2}} - e^{\frac{i\omega x}{2}}} \\ &= \frac{e^{\frac{i(2n+1)\omega x}{2}} - e^{-\frac{i(2n+1)\omega x}{2}}}{e^{\frac{i\omega x}{2}} - e^{-\frac{i\omega x}{2}}} \\ &= \frac{\sin\frac{(2n+1)\omega x}{2}}{\sin\frac{\omega x}{2}}. \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 5.9 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction $T-$périodique, de classe C^1 par morceaux sur $[0,T]$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge simplement vers*

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2},$$

et vers $f(x)$ si f est continue en x.

Démonstration. On note $g(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. Il est clair que si f est continue $g(x) = f(x)$.
Montrons que $S_n(x) - g(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a

$$\begin{aligned}
S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \Big(f(x+s) + f(x-s)\Big) D_n(s) ds - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \Big(f(x+s) + f(x-s)\Big) D_n(s) ds \\
&\quad - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} D_n(s) ds \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{f(x+s) + f(x-s) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin\frac{\omega s}{2}} \sin\frac{(2n+1)\omega s}{2} ds.
\end{aligned}$$

On considère la fonction

$$g_n(s) = \frac{f(x+s) - f(x^+) + f(x-s) - f(x^-)}{\sin\frac{\omega s}{2}}.$$

Vérifions maintenant que g_n est continue par morceaux sur $[-\frac{T}{2}, 0[$ et $]0, \frac{T}{2}]$.
Puisque f est de classe C^1 par morceaux sur $[0, T]$

$$\frac{f(x+s) - f(x^+)}{s} \underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} f'(x^+) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x-s) - f(x^-)}{s} \underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} -f'(x^-),$$

donc

$$\lim_{s\to 0^+} g_n(s) = 2\frac{f'(x^+) - f'(x^-)}{\omega} \qquad \text{et} \qquad \lim_{s\to 0^-} g_n(s) = 2\frac{f'(x^+) - f'(x^-)}{\omega}.$$

Alors, la fonction g_n est continue par morceaux sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.
On applique le lemme de Riemann-Lebesgue 5.4, on obtient

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} g_n(s) \sin\frac{(2n+1)\omega s}{2} ds \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Exemple 5.3. *Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = |x| \quad \textit{pour } x \in [-\pi, \pi].$$

Le développement de f en série de Fourier est donné par :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

On a $f(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour $x = 0$, on obtient l'identité remarquable

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

5.6 L'identité de Parseval

Théorème 5.10 (**L'identité de Parseval**[4] ([10] page 375))**.** *Soit $f:[0,T]\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux T-périodique dont la série de Fourier associée converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f. Alors :*

$$\frac{2}{T}\int_0^T\big|f(x)\big|^2dx=2a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|a_n|^2+|b_n|^2\Big).$$

Remarque 5.7. *La formule de Parseval permet de calculer la somme de certaines séries numériques.*

Exemple 5.4. *Soit f une fonction 2π-périodique définie par : $f(x)=|x|$ pour $|x|<\pi$. La série de Fourier associée à f est donnée par*

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

En appliquant l'identité de Parseval on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{4}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

On en déduit l'expression

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

4. Marc-Antoine Parseval : mathématicien français 1755-1836.

Chapitre 6

Intégrales généralisées

Dans ce chapitre, on va étendre la notion d'intégrale à des fonctions f définies et localement intégrables sur l'un des intervalles de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$. En particulier, l'une des bornes a ou b peut être infinie, éventuellement les deux.

Dans toute la suite, sauf précision contraire on supposera f et g deux fonctions localement intégrables.

Définition 6.1. On dit qu'une fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **localement intégrable** si elle est intégrable sur chaque intervalle compact (fermé et borné) de I.

Définition 6.2. On appelle **intégrale impropre** ou **généralisée** toute intégrale d'un des types suivants :

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $[a, b[$ et non définie en b.
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $]a, b]$ et non définie en a.
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $]a, b[$ et non définie en a et b.

Définition 6.3. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ sur $[a, b[$ est **convergente** si la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie à gauche de b. Dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Cette limite est appelée l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$.

Si F n'admet pas une limite à gauche de b, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **divergente** ou n'existe pas.

Si f est définie sur $]a, b]$, on définit de façon analogue l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Exemple 6.1. *Soit la fonction* $t \longmapsto \ln(t)$ *définie sur* $]0, 1]$.
On a : $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)dt = x - x\ln(x) - 1$. *Comme* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, *on en déduit que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ *converge et vaut* 1.

Exemple 6.2. *Étude de la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.
La fonction $\dfrac{1}{1+x^3}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.
La décomposition en éléments simples de f *donne* $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right)$. *On a*

$$f(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

La primitive de f *est donc*

$$F(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}(F(x) - F(a)) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - F(a).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est donc convergente.*

Définition 6.4. Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b[$, et soit c un point quelconque de $]a, b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ est convergente. Dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt. \tag{6.1}$$

Remarque 6.1. *La valeur de l'intégrale dans* (6.1) *ne dépend pas du choix de* c.

Exemple 6.3. *Étudier la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.
La fonction $t \longmapsto 1/(1+t^2)$ *est continue donc localement intégrable sur* $]-\infty, +\infty[$.
Pour chaque $x \in]-\infty, 0]$, *on a*

$$\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(x).$$

Comme la $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, *alors l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ *est convergente et vaut* $\frac{\pi}{2}$.
De même manière, on montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ *converge et vaut* $\frac{\pi}{2}$. *On en déduit que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ *converge et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Propriété 6.4.1. Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité[1] de f sur $[a,b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt.$$

Exemple 6.4.

1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ *est convergente, car* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}dt$, *on a* $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, *donc l'intégrale est convergente.*

Proposition 6.1. *Soit* $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *localement intégrable, telle que* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$.

1. *Si l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge alors* $\ell = 0$.
2. *Si* $\ell \neq 0$ *alors l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge.*

Démonstration. La première assertion est la contraposée de la seconde. Il suffit de montrer la deuxième. Supposons que $\ell > 0$, alors il existe $\eta \geq a$ tel que pour $t \geq \eta$, on ait $f(t) \geq \frac{\ell}{2} > 0$. Alors pour $x \geq \eta$, on a :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^\eta f(t)dt + \int_\eta^x f(t)dt \geq \int_a^\eta f(t)dt + \frac{\ell}{2}(x-\eta) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

l'intégrale n'est donc pas convergente. □

6.1 Intégrale de Riemann

Définition 6.5. On appelle **fonction de Riemann** la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.2. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'intégrale*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration.

1. Soit $x \in]0,1]$.

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(1-x^{1-\alpha}) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\ln(x), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

1. Une fonction f définie sur $I\backslash\{x_0\} \subset \mathbb{R}$ est dite prolongeable par continuité sur I si elle admet une limite finie en x_0.

Donc la limite $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ existe et est finie si et seulement si $\alpha < 1$. Notre intégrale est donc convergente.

2. Soit $x \in [1,+\infty[$.

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(x), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\alpha < 0, \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0. \end{cases}$$

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

Remarque 6.2. *L'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *est toujours divergente.*

Proposition 6.3. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, l'intégrale généralisée* $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ *:*

1. *converge si* $\alpha < 1$*.*
2. *diverge si* $\alpha \geq 1$*.*

Démonstration. On note $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$. On étudie l'existence de la limite de F à gauche de b.

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} \left.\frac{(b-t)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_a^x, & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\ln(b-x)\big|_a^x, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(b-x)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln\left(\frac{b-a}{b-x}\right), & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 1$,

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$, $\lim_{x\to b^-} F(x) = +\infty$

□

6.2 Cas des fonctions positives

Proposition 6.4. *Soit* f *une fonction continue par morceaux sur* $[a,b[$ *et à valeurs positives. Alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge si et seulement si la fonction* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est majorée, c'est-à-dire*

$$\exists\ M \geq 0,\ \forall\ x \in [a,b[,\ F(x) \leq M.$$

Démonstration. Comme f est positive, F est une fonction croissante sur $[a, b[$, on a pour tout $x, y \in [a, b[$ et $x < y$

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \geq 0.$$

Donc F admet une limite finie en b si et seulement si elle est majorée. □

Remarque 6.3.

1. *Si* $\int_a^b f(t)dt$ *converge alors* $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
2. *La proposition 6.4 reste vraie pour* f *positive seulement sur un voisinage de* b.

Théorème 6.5 (Critères de comparaison). *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrables et* $0 \leq f \leq g$ *sur* $[a, b[$.

1. *Si* $\int_a^b g(t)dt$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge aussi.*
2. *Si* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge, alors* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge aussi.*

Démonstration.

1. Puisque $\int_a^b g(t)dt$ converge, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_a^x g(t)dt \leq M \quad \text{pour tout} \quad x \in [a, b[.$$

Alors

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq M \quad \text{pour tout} \quad x \in [a, b[.$$

Donc, $\int_a^x f(t)dt$ est majorée. D'où la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ d'après la proposition 6.4.

2. C'est la contraposée de la première. □

Exemple 6.5.

1. *On considère l'intégrale* $\int_1^3 \sqrt{\frac{7-t}{3-t}}dt$.

La fonction $\sqrt{\frac{7-t}{3-t}}$ *est définie et continue sur* $[1, 3[$. *Pour tout* $t \in [1, 3[$, $7 - t \leq 4$, *donc on trouve*

$$\sqrt{\frac{7-t}{3-t}} \leq \frac{2}{\sqrt{3-t}}.$$

La proposition 6.3 donne la convergence de l'intégrale $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{3-t}}$.

Donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^3 \sqrt{\frac{7-t}{3-t}}dt$ *converge.*

2. *Étudier la convergence de* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

La fonction e^{-t^2} *est continue sur* $[0, +\infty[$, *et pour tout* $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. *Comme l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *est convergente, d'après le critère de comparaison l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *converge aussi.*

3. *Montrons que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)}$ *est divergente.*

On a :

$$0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\ln(t)}, \qquad \text{pour tout} \qquad t \geq 2,$$

avec $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}$ *est une intégrale de Riemann divergente.*
Donc, le critère de comparaison donne le résultat.

Corollaire 6.6. *Soit* $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction localement intégrable.*

1. *S'il existe* $\alpha < 1$ *tel que* $\lim\limits_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = 0$*, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge.*
2. *S'il existe* $\alpha \geq 1$ *tel que* $\lim\limits_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = +\infty$*, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

Démonstration.

1. Puisque $\lim\limits_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = 0$, on peut trouver un réel $c \in [a, b[$ tel que

$$|(b-t)^\alpha f(t)| \leq 1 \text{ pour tout } t \in [c, b[.$$

Autrement dit

$$|f(t)| \leq \frac{1}{(b-t)^\alpha} \qquad \text{pour tout} \qquad t \in [c, b[.$$

La proposition 6.3 donne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ pour $\alpha < 1$.
On conclut à l'aide du critère de comparaison 6.5.

2. La limite $\lim\limits_{t\to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = +\infty$ est équivalent à : pour tout $\eta > 0$ il existe $c \in [a, b[$ tel que $(b-t)^\alpha f(t) > \eta$ pour tout $t \in [c, b[$.
On écrit

$$f(t) > \frac{\eta}{(b-t)^\alpha} \text{ pour tout } t \in [c, b[.$$

On conclut comme précédemment. □

Exemple 6.6. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)dt$ *est convergente. En effet, la fonction* $\ln(1-t)$ *est continue sur* $[0, 1[$*, donc localement intégrable. on a*

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t)^{\frac{1}{2}} \ln(1-t) = 0,$$

Corollaire 6.7. *Soit* $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction localement intégrable.*

1. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\alpha f(t)$ *existe et est non nulle, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*
2. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$*, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge absolument.*
3. *S'il existe* $\alpha \leq 1$ *tel que* $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$*, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du corollaire précédent. □

Exemple 6.7. *On considère l'intégrale* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)}$. *On a* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln(t)} = +\infty$, *ce qui donne la convergence de l'intégrale.*

Définition 6.6. Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage d'un point x_0 lorsqu'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 tel que :

$$f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x)) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème 6.8 (**Critère de l'équivalence**). *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a,b[$, positives et équivalentes en b ($f \underset{b^-}{\sim} g$). Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Démonstration. Les fonctions f et g étant équivalentes au voisinage de b, alors il existe deux constantes $\xi > 0$ et $\eta \in [a,b[$ telles que :

$$t \in [\eta, b[, \quad 0 < (1-\xi)g(t) \leq f(t) \leq (1+\xi)g(t).$$

Le critère de comparaison 6.5 montre, en utilisant l'inégalité $(1-\xi)g(t) \leq f(t)$, que si l'intégrale $\displaystyle\int_\eta^b f(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_\eta^b g(t)dt$ converge aussi.
Même raisonnement par l'inégalité de droite, on en conclut donc que l'intégrale de f et de g sont de même nature. □

Exemple 6.8.

1. *On montre que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$ *converge.*
   La fonction $\frac{1}{\sqrt{t^3+t}}$ *est définie et continue sur* $]0,1]$, *et au voisinage de* 0 *on a :*

   $$\frac{1}{\sqrt{t^3+t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *est une intégrale de Riemann convergente.*
   Donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$ *converge d'après le critère d'équivalence.*

2. *On considère l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+\cos(t)}{t^3+\sin(t)}dt$. *Comme* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\cos(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3} = 0$ *on a*

   $$\frac{t+\cos(t)}{t^3+\sin(t)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

   Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *est de Riemann convergente, en on déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+\cos(t)}{t^3+\sin(t)}dt$ *est convergente.*

Proposition 6.9 (**Intégrale de Bertrand**). *Soient α, β des nombres réels.*

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ *converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).*

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha \big|\ln(t)\big|^\beta}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 0$ *ou bien* ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$).

Remarque 6.4. *Les bornes* $\frac{1}{2}$ *et* 2 *on peut les remplacer par d'autres valeurs respectivement inférieur et supérieur de* 1.

Démonstration.
1. **Au voisinage de** $+\infty$**.**
• Cas $\alpha < 1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha + \gamma < 1$. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\gamma}{\big(\ln(t)\big)^\beta} = +\infty$, il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\frac{t^\gamma}{\big(\ln(t)\big)^\beta} > 1 \quad \text{pour tout} \quad t \geq A.$$

Donc on écrie

$$\frac{1}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta} > \frac{1}{t^{\alpha+\gamma}}.$$

Puisque $\alpha + \gamma < 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+\gamma}}$ est divergente d'après la proposition 6.3.

Donc, le critère de comparaison 6.5 implique que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ est divergente.

• Si $\alpha = 1$, on a la primitive

$$\int_2^x \frac{dt}{t\big(\ln(t)\big)^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\Big(\big(\ln(x)\big)^{1-\beta} - \big(\ln(2)\big)^{1-\beta}\Big) & \text{si } \alpha \neq 1 \\[2ex] \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{is } \beta = 1 \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{dt}{t\big(\ln(t)\big)^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ +\infty & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{\beta-1}\big(\ln(2)\big)^{1-\beta} & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

Par conséquence, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ converge pour $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

• Si $\alpha > 1$, Pour tout $t \geq 2$, $\ln(t) \geq \ln(2)$, alors on a

$$\frac{1}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta} \leq \frac{1}{(\ln(2))^\beta\ t^\alpha},$$

ce qui montre la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\big(\ln(t)\big)^\beta}$ d'après la comparaison avec une intégrale de Riemann.

2. **Au voisinage de** 0**.** Le changement de variable $s = \frac{1}{t}$ permet de ramener l'étude de $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha\big|\ln(t)\big|^\beta}$ à celle de $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_2^y \frac{ds}{s^{2-\alpha}\big(\ln(s)\big)^\beta}$ avec $y = \frac{1}{x}$, ce qui nous ramène au cas précédente. □

Nous avons vu un résultat qu'on peut l'utiliser pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée dans le chapitre des séries numériques (Théorème 2.14, page 17).

6.3 Cas des fonctions de signes quelconques

Théorème 6.10 (**Critère de Cauchy pour les intégrales** ([2] page 980)). *L'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente si et seulement si*

$$\forall\ \varepsilon,\ \exists\ c \in [a, b[,\ \forall\ x, y \in [c, b[,\ \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

Définition 6.7. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si et seulement si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Exemple 6.9.

1. *On considère l'intégrale* $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.
   La fonction $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ *est continue sur* $]0, 1]$, *et elle vérifie* $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq 1$. *Comme la fonction constante égale à* 1 *est intégrable sur* $]0, 1]$, *alors l'intégrale* $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ *est absolument convergente d'après le critère de comparaison 6.5.*
2. *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ *est absolument convergente.*
   En effet, pour tout $t \geq 1$ *on a :* $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$.
   L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *est une intégrale de Riemann convergente.*
   Donc d'après le critère de comparaison 6.5 l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ *est convergente, ce qui montre la convergence absolue de* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$.

Définition 6.8. Une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est **semi-convergente** si elle converge mais ne converge pas absolument.

Exemple 6.10. *On considère l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
On note $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. *Par intégration par partie on obtient*

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ *est convergente (Exemple 6.9).*
Ce qui équivaut à :

$$\exists\ \ell \in \mathbb{R}\ \textit{tel que}\ \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \ell.$$

En plus on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ *car* $\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$.
Donc, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \cos(1) - \ell$.

Ce qui montre que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *converge.*

Montrons maintenant qu'elle ne converge pas absolument.
Soit $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{|\sin(t)|}{t}dt \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin^2(t)}{t}dt &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos(2t)}{t}dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x) - \ln\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos(2t)}{t}dt. \end{aligned} \tag{6.2}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt$ *est convergente. En effet, par intégration par partie sur* $[\frac{\pi}{2}, x]$ *on trouve*

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos(2t)}{t}dt = \frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin(2t)}{t^2}dt.$$

On a $\frac{\sin(2x)}{2x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et, comme dans l'**Exemple 6.9** on peut montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}dt$ *converge absolument.*
Dans ce cas, on a bien l'existence de la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos(2t)}{t}dt.$
De l'inégalité (6.2) *on obtient en passant à la limite lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *:*

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *ne converge pas absolument.*

Théorème 6.11. *Si l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente, alors est convergente et on a :*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt. \tag{6.3}$$

Démonstration. Comme l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente, elle vérifiée le critère de Cauchy, on a :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta \in [a, b[,\ \forall\ x, y \in [\eta, b[,\ \int_x^y |f(t)|dt \leq \varepsilon.$$

Or,

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt,$$

d'où la convergence de $\displaystyle\int_x^y f(t)dt$.
D'autre part, pour tout $x \in [a, b[$,

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|dt,$$

et comme les intégrales de f et $|f|$ convergent sur $[a, b[$, on passe à la limite quand x tend vers b, ce qui implique l'inégalité (6.3). □

Théorème 6.12 (**Règle d'Abel**). *Soit f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$, vérifiant :*

1. *f positive, décroissante et $\lim_{t \to b^-} f(t) = 0$,*
2. *g à valeurs réelles ou complexes, et*

$$\exists\ M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ x \in [a, b[,\ \left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq M.$$

Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

Pour démontrer ce résultat on a besoin de la proposition suivante

Proposition 6.13 (**Deuxième formule de la moyenne** [8]). *Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ à valeurs réelles. f est positive et décroissante. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt. \tag{6.4}$$

Démonstration. **Théorème** 6.12
On suppose que g est à valeurs réelle. Comme f tend vers zéro en b^-, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in [a, b[$ tel que

$$\forall\ x \in [\eta, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq \varepsilon.$$

Soit $x, y \in [\eta, b[$. D'après la seconde formule de la moyenne, il existe $z \in [x, y]$ tel que

$$\int_x^y f(t)g(t)dt = f(x) \int_x^z g(t)dt.$$

Ce qui donne

$$\left| \int_x^y f(t)g(t)dt \right| \leq M\varepsilon.$$

Donc l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge d'après le critère de Cauchy 6.10.

Si g et à valeurs complexe on écrit $g(t) = \mathrm{Re}(g) + i\,\mathrm{Im}(g)$. De même manière, on peut montrer que les intégrales

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{Re}(g(t))dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{Im}(g(t))dt,$$

vérifiées le critère de Cauchy 6.10, ce qui nous donne la convergence de $\int_a^b f(t)g(t)dt$. □

Exemple 6.11. *Étude de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ pour α réel strictement positif.*
La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive et décroissante vers zéro. D'autre part,

$$\forall\ t \geq 1,\ \left| \int_1^x \sin(t)dt \right| = |\cos(x) - \cos(1)| \leq 2.$$

Les hypothèses de la règle d'Abel sont satisfaites. D'où la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$.

6.4 Formule d'intégration par partie

La formule d'intégration par parties s'étend aux intégrales généralisées sous la forme suivante :

Théorème 6.14 (**Formule d'intégration par partie**). *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b[$. On suppose que $\lim\limits_{t \to b^-} f(t)g(t)$ existe. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ converge ; autrement dit, les deux intégrales sont de même nature.*
S'il y a convergence on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{t \to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt. \tag{6.5}$$

Démonstration. Soit $x \in [a, b[$. On fait une intégration par partie sur $[a, x]$, on obtient :

$$\int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)dt.$$

Donc si $\lim x \to b^- f(x)g(x)$, on a bien que $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence on a bien la formule (6.5). □

Exemple 6.12. *Étude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.*
Par intégration par partie sur $[1, x]$ pour $x > 1$, on obtient

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt = -\frac{\ln(x)}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t^2}.$$

La fonction $\frac{\ln(x)}{x}$ admet une une limite finie en $+\infty$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente.
Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ est convergente.

6.5 Formule de changement de variable

Proposition 6.15. *Soit ϕ une application bijective de $[a, b[$ dans $[\alpha, \beta[$ de classe C^1, f une fonction continue sur $[a, b[$. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f \circ \phi(s)\phi'(s)ds$.*
En plus on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \phi)(s)\ \phi'(s)ds. \tag{6.6}$$

Démonstration. Comme ϕ est une bijection sur $[a, b[$ alors elle est strictement monotone. On suppose du'elle est strictement croissante, on a donc

$$\phi(a) = \alpha, \qquad \lim_{t \to b^+} \phi(t) = \beta.$$

On considère les fonctions F et $\widetilde{F}$ définies par

$$F(x) = \int_a^x f(t)ds, \qquad \widetilde{F}(y) = \int_\alpha^y f(\phi(s))\phi(s)ds.$$

On applique le changement de variable $t = \phi(s)$ pour $t \in [a, x]$, on obtient

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_\alpha^{\phi(x)} f(\phi(s))\phi'(s)ds.$$

Donc, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge

$$\lim_{x\to b^+} F(x) = \int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(s))\phi'(s)ds.$$

D'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\phi)(s)\phi'(s)ds$, et on a (6.6). □

Remarque 6.5. *Si ϕ est décroissante alors elle est de $[a, b[$ à valeurs dans $]\beta, \alpha]$, et on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_\alpha^\beta (f\circ\phi)(s)\ \phi'(s)ds.$$

Exemple 6.13. *Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$.*
Soit le changement de variable $t = \frac{1}{s}$ de C^1 sur $]0, 1]$ dans $[1, +\infty[$.
On obtient donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\cos(s)}{s^2} ds$ qui convergente (voir l'exemple 6.9 page 75), ce qui nous donne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

Bibliographie

[1] S. Balac et L. Chupin, *Analyse et algèbre : cours de mathématiques de première année avec exercices*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2003.

[2] S. Balac et L. Chupin, *Analyse et algèbre : cours de mathématiques de deuxième année avec exercices*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2008.

[3] A. Bouvier, *Théorie élémentaire des séries*, Hermann, 1971.

[4] J. F. Dantzer, *mathématiques pour l'agrégation interne : Analyse et probabilités, cours et exircices corrigés*, Vuibert, 2007.

[5] F. Cottet-Emard, *analyse*, De Boeck, 2005.

[6] M. El Amrani, *Intégrale de Riemann. Théorie et pratique, avec exercices corrigés*, Hermann, 2009.

[7] G. Flory, *Exercices de topologie et d'analyse, tome 4 : séries et equations différentielles*, VUIBERT, 1978.

[8] X. Gourdon, *Analyse, les maths en tête,* Ellipses, 2ème édition, 2008.

[9] B. Gostiaux, *Cours de mathématiques spéciales. Tome 2 : Topologie, analyse réelle*, Presses Universitaires de France, 1993.

[10] D. Guinin et B. Joppin, *Analyse MP*, Bréal, 2004.

[11] J. M. Monier, *Analyse MP : cours, méthodes et exercices corrigés,* Dunod, 5ème édition, 2007.

[12] H. QuefTélec, *Topologie : cours et exercices corrigés*, Dunod, 3e édition, 2002.

[13] O. Rodot, *analyse mathématique une approche historique*, De Boeck, Bruxelles 2010.

[14] J. Voedts, *Cours de mathématiques MP-MP**, Ellipses, 2002.

[15] William F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, (2013). Faculty Authored Books. Book 7. `\http://digitalcommons.trinity.edu/mono/7`.

.

Exercices de chapitre 2

Exercice 1 :

Etudier la convergence et eventuellement calculer la sommes des séries

$$1)\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n^4+n^2+1},\ 2)\ \sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ 3)\sum_{n\geq 0}\ln\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right],0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 :

Etudier la nature des séries suivantes

$$1)\sum_{n\geq 0}\left[\frac{n+1}{n+2}\right]^{n^2},2)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{3^n}\right)$$

Exercice 3 :

Etudier la nature des séries suivantes

1) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^2}$, 2) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

Exercice 4 :

Soit

$$P(n)=1^2+2^2+...+n^2.$$

1) Donner le polynome f de dégré troix qui vérifié

$$f(x+1) - f(x) = x^2$$

2) Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{P(n)}$.

Exercice 5 :

Soit la série de terme général $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et soit (S_n) la suite des sommes partielles de cette série :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

1) Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^{\alpha}},\ \text{pour } x \in [k-1, k]$$

2) Suppposons que $1 - \alpha < 0$:

- Montrer que

$$S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

3) Suppposons maintenant que $\alpha = 1$

- Montrer que

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

- En déduire que

$$S_n \geq \ln(n+1)$$

et qu'elle est la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Exercices des chapitres 2 et 3

Exercice 1 :

Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

1) En utilisant la définition étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Est-ce que la convergence est uniforme ?

3) Etudier la convergence est uniforme de (f_n)sur $[a, +\infty[\,, a > 0$.

<u>Exercice 2 :</u>

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = e^{-nx}\cos(nx)$$

• Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.

<u>Exercice 3 :</u>

Soient a et b deux réels vérifiant : $0 < a < b < 1$.

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)dx.$$

<u>Exercice 4 :</u>

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

1) Etudier la convergence simple de cette série sur $[0,1[$.

2) Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,a]$ où $a \in]0,1[$.

<u>Exercice 5 :</u>

Soit la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)$ tel que :

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2}\ln x, \text{pour } x \in]0,1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

1) Etudier la convergence uniforme de $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)$ sur $]0,1]$.

2) Calculer $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$.

3) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 6 :

1) Montrer :$\forall x \in [-1,1]$,

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

2) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$

Exercices de chapitre 4

Exercice 1 :

Calculer le rayon de convergence R et la somme de série suivant :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 2 :

Calculer les sommes des séries entiéres suivante :

$$1) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}, 2) \sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n, \quad \sum_{n\geq 0} \left(1+n+n^2\right) x^n$$

Exercice 3 :

1) Calculer pour $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt$$

2) En déduire $I_{n,n}$.

3) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la séries entiére :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$$

Exercice 4 :

Calculer, en se servant du développement en série entière d'une fonction, la somme de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}}$$

Exercice 5 :

Trouver le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence :

$$1)\ f(x) = \ln\left(1+2x^2\right),\ 2)\ g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)^2}, 3)\ h(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Exercices de chapitre 5

Exercice 1 :

Soit f une fonction périodique de période T, et soit φ la fonction définie par

$$\varphi(x) = f(ax)$$

• Montrer que φ est aussi une fonction périodique de période $\frac{T}{a}$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 2\pi$ périodique,paire,tell que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ si } t = \frac{\pi}{2}, \\ -1 \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq t < \pi, \end{cases}$$

1) Vérifier que $f \in CM_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier de f.

2) Etudier la cnvergence de la série de Fourier de f.

3) En déduire les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}, \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 3 :

1) Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(x) = \mid x \mid \text{ pour } \mid x \mid < \pi$$

2) En déduire la somme de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

Exercice 4 :

Soit f une fonction de période T, définie par :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inwx}, \; n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Poson

$$\varphi_n(x) = e^{inwx}, n \in \mathbb{Z}$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions complexes intégrables sur $\triangle = [\alpha, \alpha + T]$,

On définie le produit scalaire

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{C} \\ (f, g) & \mapsto & (f, g) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{\triangle} f(x) \overline{g(x)} dx, \end{array}$$

1) - Calculer (φ_n, φ_m) pour toute $n, m \in \mathbb{Z}$.

2) L'écriture (1) représente quoi ?

3) Calculer (f, f).

Exercices de chapitre 6

Exercice 1 :

Soit a un réel strictement positif.

On considère une fonction positive et intégrable f sur tout compact inclus dans $[a, +\infty[$.

On suppose qu'il existe $\alpha \leq 1$ tel que :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = +\infty.$$

• Quel est la nature de l'intégrale

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

Exercice 2 :

• Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$1) \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \;\; 2) \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$$

Exercice3 :

• Etudier suivant les valeurs du réel α la nature de l'intégrale :

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1 + x} dx$$

Exercice 4 :

1) Etudier la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}}$$

2) Calculer I.

Exercice 5 :

Soit la fonction gamma définie par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1) Montrer que

$$\forall x > 0, \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

2) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}.$$

Solutions des exercices

Exercices de chapitre 2

Exercice 1 :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^4+n^2+1}$,

On a

$$u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}, \forall n \geq 1 : u_n \geq 0$$

Donc la série est à terme positif.

D'autre part

$$u_n \widetilde{+\infty} \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n \widetilde{+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$$

Qui est série de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^4+n^2+1}$est convergente.

• Calculons la somme S :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Où

$$u_k = \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1/2}{k^2-k+1} - \frac{1/2}{k^2+k+1}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n.$$

Pour $k = 1 : u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$k = 2 : u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}$

$k = 3 : u_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{13}$

....

$k = n : u_n = \frac{1/2}{n^2-n+1} - \frac{1/2}{n^2+n+1}$

Alors

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{n^2+n+1}$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1/2}{n^2+n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ceci veut dir que la série converge vers $S = \frac{1}{2}$.

2) $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $\quad u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

On a

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\sim {}_0 x \\ &\Rightarrow u_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{n^2} \\ &\Rightarrow |u_n| \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\Rightarrow \sum_{n\geq 2} |u_n| \sim_{+\infty} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$,qui est série de Riemann convergente, donc $\left(\sum_{n\geq 2} |u_n|\right)$converge, alors $\left(\sum_{n\geq 2} u_n\right)$ converge absolument, donc la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ convergente.

• Calculons la somme S :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n, \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$$

Où

$$u_k = \ln(k-1) - \ln k + \ln(k+1) - \ln k$$

Pour $k=2$: $u_2 = \ln(1) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(2)$

$k=3$: $u_3 = \ln(2) - \ln(3) + \ln(4) - \ln(3)$

$k=4$: $u_4 = \ln(3) - \ln(4) + \ln(5) - \ln(4)$

$k=5$: $u_4 = \ln(4) - \ln(5) + \ln(6) - \ln(5)$

....

$k = n-2 : u_{n-2} = \ln(n-3) - \ln(n-2) + \ln(n-1) - \ln(n-2)$

$k = n-1 : u_{n-1} = \ln(n-2) - \ln(n-1) + \ln(n) - \ln(n-1)$

$k = n : u_n = \ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n)$

Alors

$$S_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2$$

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2 \\ &- \ln 2 \end{aligned}$$

Ceci veut dir que la série converge vers $S = -\ln 2$.

3) $\sum_{n\geq 0} \ln\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right], 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $u_n = \ln\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right], \forall n \geq 0$.

On a

$$\ln(1+x) \sim_0 x, \ \cos x \sim_0 1 - \frac{x^2}{2}$$

D'ou

$$\begin{aligned} u_n &\sim_{+\infty} -\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \sim_{+\infty} -\alpha^2 \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ qui est une série géomètrique convergente car de raison $\frac{1}{4} < 1$, donc la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]$ convergente.

• Calculons la somme S :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On sait que

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

On peut écrie

$$u_k = \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right) - \ln 2$$

Pour $k=0: u_0 = \ln(\sin(2\alpha)) - \ln(\sin\alpha) - \ln 2$

$k=1: u_1 = \ln(\sin\alpha) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \ln(2)$

$k=2: u_2 = \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right) - \ln(2)$

....

$k=n: u_n = \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) - \ln 2$

Alors

$$S_n = \ln\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right) - \ln\left(2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right)$$

On sait que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right) - \ln\left(2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right)\right] \\ &= \ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \end{aligned}$$

Ceci veut dir que la série converge vers $S = \ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

<u>Exercice 2 :</u>

1) $\sum_{n\geq 0} \left[\frac{n+1}{n+2}\right]^{n^2}$, $\quad u_n = \left[\frac{n+1}{n+2}\right]^{n^2}$, $\forall n \geq 0$, $u_n > 0$. La série a terme positif.

D'après le critère de Cauchy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \\ &= e^{-1} < 1 \end{aligned}$$

Donc la série convergente.

2) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{3^n}\right)$, $\quad u_n = \frac{n}{3^n}$, $\forall n \geq 1$, $u_n > 0$. La série a terme positif.

D'après le critère de D'alembert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{3}<1\end{aligned}$$

Donc la série convergente.

<u>Exercice 3 :</u>

1) $\sum_{n\geq1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^2}$, $u_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^2}, \forall n\geq 1$, $u_n>0$. La série a terme positif.

D'après le règle de Riemann il existe $\alpha=2>1$: $\lim_{n\to+\infty} n^2u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

Donc la série convergente.

2) $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$, $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$

On a

$$\begin{aligned}|u_n| &= \frac{1}{n^2+\sin^2 n}\\ \sum_{n\geq1}|u_n| &\leq \sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

D'après le théorème de comparaison la série $\sum_{n\geq1}|u_n|$ est convergente, alors $\left(\sum_{n\geq1}u_n\right)$ converge absolument

Donc $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$ est convergente.

<u>Exercice 4 :</u>

1) Supposons

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

$a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

On utilise

$$f(x+1)-f(x)=x^2$$

On obtient

$$f(x)=\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x$$

2) Calcule

$$P(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2.$$

D'après la question précédent

$$P(n) = f(n+1) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

Donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{P(n)} = \sum_{n\geq 1} \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

Alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{P(n)} \sim_{+\infty} 3 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$$

D'après le théorème de comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{P(n)}$ est convergente.

Exercice 5 :

1) On a

$$\forall x \in [k-1, k] : \frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$$

Par intégration sur $[k-1, k]$:

$$\begin{aligned}
\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad &\geq \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dx \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dx \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx.
\end{aligned}$$

2) Pour $1-\alpha<0 \Rightarrow \alpha>1$: D'après la question précédent

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq 1+\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx \\ &= 1+\left(\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

D'ou

$$S_n \leq 1+\frac{1}{\alpha-1}$$

puisque la suite (S_n) majorée donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha>1$.

3) Pour $\alpha=1$: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

On prouve maintenant

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$$

On a pour $x\in[k,k+1]$:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx &\leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=S_n \\ &\Rightarrow S_n \geq \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

Alors

$$S_n \geq \ln(n+1)$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$$

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

Exercices de chapitre 2 et 3

Exercice 1 :

1) La convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}_+^*$:

On $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ alors $f_n(x) \to^{cs} f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par définition $f_n(x) \to^{cs} f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}_+^* \iff \forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x), \forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| \leq \varepsilon$$

Prendre assez $n_0(\varepsilon, x) = \left[\frac{1-\varepsilon}{x\varepsilon}\right] + 1$.

2) La convergence de (f_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas uniforme car n_0 depend de x et ε.

3) La convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[, a > 0$:

$$f_n(x) \to^{cu} f(x) \text{ sur } [a, +\infty[, a > 0 \text{ si } \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Par calcul simple on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

D'ou la convergence de (f_n) sur $[a, +\infty[, a > 0$ est uniforme.

Exercice 2 :

1) La convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$:

On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x = 0 \\ 0, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On remarque que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^+$, $\forall n \geq 0$, donc d'après le théorème de continuité d'une suite de fonctions la convergence de (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 :

On pose

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right), \; x \in \left]a, b\right[, \; 0 < a < b < 1$$

(f_n) est continue sur $]a, b[$, alors $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ existe.

1) La convergence simple de (f_n) sur $\left]a, b\right[$:

$\forall x \in \left]a, b\right[: \lim_{n\to+\infty} x^{2n} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(0) = 0$.

D'ou $f_n(x) \to^{cs} f(x) = 0$ sur $\left]a, b\right[$.

2) La convergence uniforme de (f_n) sur $\left]a, b\right[$:

On a

$$\begin{aligned}
\forall n &\geq 0, \forall x \in \left]a, b\right[: |f_n(x) - f(x)| = \left|\sin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)\right| \\
&\leq \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \leq x^{2n} \leq b^{2n}
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]a,b[} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} b^{2n} = 0$$

D'ou $f_n(x) \to^{cu} f(x) = 0$ sur $\left]a, b\right[$.

D'après le théorème d'interversion (limite-intégrale) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b \sin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right) dx &= \int\limits_a^b \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

<u>Exercice 4 :</u>

1) La convergence simple de la série sur $[0, 1[$:

La série $\sum_{n\geq 0} x^{2n}$ est une série géométrique convergente car de raison $x^2 < 1$.

Pour $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k} \\ &= \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

D'ou

$$\sum_{n\geq 0} x^{2n} \to^{cs} S(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

2) La convergence uniforme de la série sur $[0,a]$ où $a \in]0,1[$:

$\forall x \in [0,a]$: $|x^{2n}| \leq a^{2n}$, or la série de terme général a^{2n} est convergente, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^{2n}$ est normalment convergente sur $[0,a]$

de plus uniformement sur $[0,a]$.

<u>Exercice 5 :</u>

1) La convergence uniforme de $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)$ sur $]0,1]$.

On a pour les séries alternés $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}|(x)$, donc

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x^{2k+2} \ln x\right| \\ &\leq x^{2n+4} |\ln x| \end{aligned}$$

Poson

$$g_n(x) = x^{2n+4} |\ln x|, \ x \in]0,1],$$

Alors

$$g_n(x) = -x^{2n+4} \ln x, \ x \in]0,1],$$

Et

$$g_n'(x) = x^{2n+3} [-(2n+4)\ln x - 1],$$

$$g_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e^{\frac{-1}{2n+4}},$$

Donc

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{-1}}{2n+4}, \ \forall x \in]0,1]$$

D'ou

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} |R_n(x)| &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}}{2n+4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalment $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)$ est convergence uniforme sur $]0,1]$.

2) On a

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} u_n(x) &= \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \\ &= -x^2 \ln x \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n}, \end{aligned}$$

D'autre part

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in]0,1],$$

Alors

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2}, \ x \in]0,1].$$

3) Nous prouvons que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx &= \int_0^1 \frac{(1+x^2-x^2)\ln x}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 \ln x dx - \int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}dx \\ &= -1 + \int_0^1 \frac{-x^2\ln x}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

D'après la question (2) :

$$\int_0^1 \frac{-x^2\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} u_n(x)\, dx$$

Et d'après la question (1) , $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)$ est convergence uniforme sur $]0,1]$,donc on peut intervertire $\int_0^1$ et $\sum_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-x^2\ln x}{1+x^2}dx &= \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} x^{2n+2}\ln x dx \\ &= \sum_{n\geq 0} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2}\ln x dx\end{aligned}$$

Par intégration par partie

$$\int_0^1 \frac{-x^2\ln x}{1+x^2}dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx &= -1+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2} \\ &= -1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

D'ou le résultat.

<u>Exercice 6 :</u>

1) Nous prouvons que $\forall x \in [-1,1]$:

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$$

On a

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}dt = \int_0^1 (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xt^3\right)^n dt$$

Soit

$$\begin{aligned} g_n &: [0,1]\to\mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^1 (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xt^3\right)^n dt\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(1-t)\left(xt^3\right)^n dt, \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).\end{aligned}$$

• La convergence uniforme de $(g_n(t))$ sur $]0,1[$:

On a

$$|R_n(t)| = \left| \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-t)\left(xt^3\right)^k dt \right|$$

La série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(xt^3\right)^k$ est une série géométrique convergente car de raison $xt^3 < 1$,

Alors

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &= \left| \int_0^1 \frac{(1-t)\left(xt^3\right)^{n+1}}{1-xt^3} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{(1-t)\,t^{3n+3}}{1-t^3} dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t+t^2} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{3n+3} dt \\ &= \frac{1}{3n+4} \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} |R_n(x)| &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n+4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la série

$$g_n(t) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).$$

est converge uniformement sur $[0,1]$, d'après le theorème d'intégration d'une série de fonctions on peut intervertire $\int_0^1$ et $\sum_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}dt &= \int_0^1 (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xt^3\right)^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (1-t)\left(xt^3\right)^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\left[\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}.
\end{aligned}$$

2) Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$est convergente.

D'après la question précédent, pour $x = 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} &= \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^3}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}dt \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ est convergente vers $s = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercices de chapitre 4

Exercice 1 :

La domaine de convergence de cette série est $\triangle =]-1, 1[$.

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(n+1)(2n+1)} = 2\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2n+1} + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1}$$

Par calcul simple

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)\,, & x\in\left]-1,0\right[\,,\\ 1, & x=0,\\ \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{x}\ln(1-x)\,, & x\in\left]0,1\right[\,,\end{cases}$$

Exercice 2 :

1) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1}$,

La domaine de convergence de cette série est $\triangle=\left]-1,1\right[$.

Par calcul simple

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1}=\begin{cases}\frac{-1}{4x}\ln(1+x^4)\,, & x\in\left]-1,0\right[\cup\left]0,1\right[\,,\\ \\ 0, & x=0\end{cases}$$

2) $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n}{(2n+1)!}$,

La domaine de convergence de cette série est $\triangle=\left]-\infty,+\infty\right[$.

Par calcul simple

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(2n+1)!}=\begin{cases}\frac{1}{2}ch\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0,\\ 0, & x=0\\ \frac{1}{2}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}, & x<0,\end{cases}$$

3) $\sum\limits_{n\geq 0}(n^2+n+1)\,x^n$,

La domaine de convergence de cette série est $\triangle=\left]-1,1\right[$.

On a

$$\sum_{n\geq 0}\left(n^2+n+1\right)x^n=\sum_{n\geq 0}n^2x^n+\sum_{n\geq 0}nx^n+\sum_{n\geq 0}x^n$$

Par calcul simple

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} x^n &= \frac{1}{1-x}, |x|<1, \\
\sum_{n\geq 0} nx^n &= \frac{x}{(1-x)^2}, |x|<1, \\
\sum_{n\geq 0} n^2x^n &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, |x|<1,
\end{aligned}$$

Finalement

$$\sum_{n\geq 0}\left(n^2+n+1\right)x^n = \frac{1+x^2}{(1-x)^3}, \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

<u>Exercice 3 :</u>

1) Calcul de $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q\, dt, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,$

Par intégration par partie :

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q\, dt = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

D'ou

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \cdot \frac{q-1}{p+2} \cdots\cdots \frac{1}{p+q} I_{p+q,0}$$

et

$$I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q} dt = \frac{1}{p+q+1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \frac{q(q-1)(q-2)\ldots.1}{(p+1)(p+2)\ldots.(p+q+1)} \\
&= \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.
\end{aligned}$$

2) Si $p=q=n$ on a

$$I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3) Calcul de $\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$, La domaine de convergence de cette série est $\triangle =]-4,4[$.
D'après la question précédent

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^n &= \sum_{n\geq 0}\int_0^1 x^n t^n (1-t)^n\, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n t^n (1-t)^n\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{xt^2 - xt - 1} dt
\end{aligned}$$

si $x \neq 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{xt^2 - xt - 1} dt = \frac{2}{x}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}}$$

où $u = t - \frac{1}{2}$.

On a deux cas :

Pour $0 < x < 4$:

$$\int_0^1 \frac{1}{xt^2 - xt + 1} dt = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

Pour $-4 < x < 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{xt^2 - xt + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{-x(4-x)}} \ln\frac{\sqrt{(4-x)} + \sqrt{-x}}{\sqrt{(4-x)} - \sqrt{-x}}.$$

Pour $x = 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{xt^2 - xt + 1} dt = \int_0^1 dt = 1$$

Finalement

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^n=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{x(4-x)}}\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}, & 0<x<4,\\ 1 & ,\ x=0\\ \frac{2}{\sqrt{-x(4-x)}}\ln\frac{\sqrt{(4-x)}+\sqrt{-x}}{\sqrt{(4-x)}-\sqrt{-x}}, & -4<x<0.\end{cases}$$

Exercice 4 :

Calcul de $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\left(\sqrt{3}\right)^{2n-2}}$$

Pour $x\in\,]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\arctan x &= \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p\,x^{2p+1}}{2p+1}\\ &= \sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^{p-1}\,x^{2p-1}}{2p-1}\end{aligned}$$

Donc pour $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\in\,]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)\left(\sqrt{3}\right)^{2p-2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)\,3^{p-1}}\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}} &= \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1) $f(x)=\ln(1+2x^2)$

On a

$$\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{t^n}{n}, \quad |t| < 1.$$

Donc

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^{2n}}{n}, \ |x| < 1.$$

2) $g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)^2}$,

On a

$$g(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{-1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^n} + \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} \\ &= -\sum_{n\geq 0} \left(n + 2^{-n-1}\right) x^n, \ |x| < 1. \end{aligned}$$

3) $h(x) = \sqrt{1+x^2}$,

On a $(1+u)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est développable en série entière ai voisinage de 0 et

$$(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

Nous choisissons $\alpha = \frac{1}{2}$et $u = x^2$, on obtient

$$h(x) = \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 2 \times 3 \times ... \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n} x^{2n}.$$

Exercices de chapitre 5

Exercice 1 :

On a

$$\varphi\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f(ax + T)$$

f est périodique, donc

$$f(ax+T) = f(ax) = \varphi(x)$$

Alors

$$\varphi\left(x+\frac{T}{a}\right) = \varphi(x)$$

D'ou φ est périodique de période $\frac{T}{a}$.

Exercice 2 :

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ si } t = \frac{\pi}{2}, \\ -1 \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq t < \pi, \end{cases}$$

1) Il est clair que f est 2π périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,donc $f \in CM_{2\pi}$,est les coefficients de Fourier (trigonométrique) de f existent.

Puisque f est paire on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n = 0.$$

Nous calculons a_0 et a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0, \\ a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nt dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nt dt\right] \\ &= \frac{4}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

Donc

$$\forall p \in \mathbb{N} : a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)}$$

Alors

$$f(t) \approx \sum_{p \geq 0} \frac{4(-1)^p}{\pi(2P+1)} \cos(2p+1)t.$$

2) Puisque f est 2π périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement

sur $\mathbb{R}$ et pour somme $\widetilde{f}$ de f.

On a donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : \widetilde{f}(t) &= \frac{1}{2}\left(f\left(t^+\right) + f\left(t^-\right)\right) \\ &= \sum_{p \geq 0} \frac{4(-1)^p}{\pi(2P+1)} \cos(2p+1)t. \end{aligned}$$

3) Il est clair que les séries $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}$, $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$, et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont convergentes.

Pour $t = 0$:

$$1 = \sum_{p \geq 0} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)}$$

c-à-d

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$$

D'après la formule de parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 \, dt = a_0^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} \frac{16}{\pi^2 (2p+1)^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 \, dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc
$$\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Pour la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}$,on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} &= \sum_{p\geq 1}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}+\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} &= \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

Finalement
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

<u>Exercice 3 :</u>

1) La fonction f est paire, en dévelloper f en série cosinus, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}: b_n=0$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x|\,dx=\frac{\pi}{2},\\ \forall n &\in \mathbb{N}^*: a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos nx dx\end{aligned}$$

Par intégration par partie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\left(n\pi\right) - 1\right)$$

Donc pour $n = 2p : a_{2p} = 0$

pour $n = 2p + 1/$

$$a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi\left(2p+1\right)^2}$$

Alors

$$f\left(x\right) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\cos\left(2n+1\right)x}{\left(2n+1\right)^2}.$$

2) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4}$, Est une série convergente, et d'après la formule de parseval

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{16}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\left(2n+1\right)^4} \\ 0 &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{16}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\left(2n+1\right)^4} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\left(2n+1\right)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

<u>Exercice 4 :</u>

1)

$$\left(\varphi_n, \varphi_m\right) = \frac{1}{T}\int_{\triangle} e^{i(n-m)wx}dx = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

2) Le développement en série de Fourier de f :

$$f\left(x\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inwx}$$

représente donc la décomposition de f selon la base orthonormé $\left(e^{inwx}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

3)

$$\begin{aligned}(f,f) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inwx}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{imwx}\right) \\ &= \sum_{n\neq m} c_n \overline{c_m}\left(e^{inwx}, e^{imwx}\right) + \sum_{n=m} c_n \overline{c_m}\left(e^{inwx}, e^{imwx}\right)\end{aligned}$$

Or

$$\left(e^{inwx}, e^{imwx}\right) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

D'ou

$$(f,f) = \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 .$$

Exercices de chapitre 6

Exercice 1 :

On a $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$, ce la équivalent à

$$\forall M > 0, \exists b > a, \forall x \geq b : x^\alpha f(x) \geq M$$

On en déduit :

$$\forall M > 0, \exists b > a, \forall x \geq b : f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha}$$

Alors

$$\int_b^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha} dx \leq \int_b^{+\infty} f(x)\, dx$$

Or

$$\int_b^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha} dx, \ \ \alpha \leq 1$$

est divergente, d'après le théorème de comparaison $\int_b^{+\infty} f(x)\, dx$ est aussi divergente.

D'autre part
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, est divergente.

Exercice 2 :

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}dx$, La fonction $f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$ est positive et intégrable sur tout compacte inclus dans $]1,+\infty[$,

On pose
$$I = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

En 1 : $\exists\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

Alors $I_1 = \int_1^2 f(x)\,dx$ est convergente.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}f(x) &\sim_{+\infty} \frac{-2}{x^3} \\ &\Rightarrow I_2 = \int_2^{+\infty} f(x)\,dx\end{aligned}$$

est convergente.

Alors $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}dx$ est convergente.

2) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$,La fonction $g(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur tout compacte inclus dans

$]0, +\infty[$,

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx = I_1 + I_2$$

• La convergence de I_1? :

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est de la forme $\int_0^1 \frac{1}{(x-b)^{\alpha}} dx$, où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $b = 0$, donc converge pour $\alpha < 1$

Alors $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est convergente, d'après le théorème de comparaison $I_1 = \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ est aussi convergente.

• La convergence de I_2? : $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$.

$\forall x \geq 1 : \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} > 0$, de plus

$$\exists \alpha = \frac{1}{2} : \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \quad \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \Bigg) = 1$$

D'après le critère de Riemann $\exists \alpha < 1 : \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = l$, alors $_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ est divergente.

Finalement $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$, est divergente.

<u>Exercice3 :</u>

$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x} dx$, La fonction $f(x) = \frac{x^{\alpha}}{1+x}$ est positive et intégrable sur tout compacte inclus dans $]0,+\infty[$, poson

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

• La convergence de I_1? :

On a

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1+x} \sim_0 x^\alpha$$

Or $\int_0^1 x^\alpha dx$ converge si seulement si $\alpha > -1$, alors $I_1 = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x}dx$ est convergente si $\alpha > -1$.

• La convergence de I_2? :

On a

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1+x} \sim_{+\infty} x^{\alpha-1}$$

Or $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ converge si seulement si $1-\alpha > 1$, alors $I_2 = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x}dx$ est convergente si $\alpha < 0$.

Finalement $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}dx$ est convergente si $\alpha \in]-1,0[$.

<u>Exercice 4 :</u>

On a

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

• La convergence de I_1? :

D'après le règle :

$$\lim_{x\to+\infty} (b-x)^\alpha f(x) = l,\ \forall x \in [a,b[$$

Alors si $\alpha < 1$: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ est convergente.

si $\alpha \geq 1$: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ est divergente.

On a

$$\lim_{x \to a} (x-a)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

Alors

$$I_1 = \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

est convergente.

• La convergence de I_2?

On a

$$\lim_{x \to b} (b-x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

D'ou

$$I_2 = \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

est convergente.

Finalement I est convergente.

2)

$$I = \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right)}}$$

Par changement de variable :

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a} \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{2}{b-a}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Exercice 5 :

1) Nous prouvons que

$$\forall x > 0 : \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Par intégration par partie :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

D'ou le résultat.

2) On a

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Et

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

3) On a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\forall n &\in \mathbb{N} : \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)...\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)\times(2n-1)\ldots\times 3\times 2}{2^n\times(2n)\times(2n-2)\ldots\times 2}\sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

Finalement

$$\forall n\in\mathbb{N} : \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}.$$

Bibliographie

[1] S. Balac et L. Chupin, Analyse et algèbre : cours de mathématiques de première année avec exercices, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2003.

[2] S. Balac et L. Chupin, Analyse et algèbre : cours de mathématiques de deuxième année avec exercices, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2008.

[3] A. Bouvier, Théorie élémentaire des séries, Hermann, 1971.

[4] J. F. Dantzer, mathématiques pour l'agrégation interne : Analyse et probabilités, cours et exircices corrigés, Vuibert, 2007.

[5] F. Cottet-Emard, analyse, De Boeck, 2005.

[6] M. El Amrani, Intégrale de Riemann. Théorie et pratique, avec exercices corrigés, Hermann, 2009.

[7] G. Flory, Exercices de topologie et d'analyse, tome 4 : séries et equations différentielles, VUIBERT, 1978.

[8] X. Gourdon, Analyse, les maths en tête, Ellipses, 2ème édition, 2008.

[9] B. Gostiaux, Cours de mathématiques spéciales. Tome 2 : Topologie, analyse réelle, Presses Universitaires de France, 1993.

[10] D. Guinin et B. Joppin, Analyse MP, Bréal, 2004.

[11] J. M. Monier, Analyse MP : cours, méthodes et exercices corrigés, Dunod, 5ème édition, 2007.

[12] H. QuefTélec, Topologie : cours et exercices corrigés, Dunod, 3e édition, 2002.

[13] O. Rodot, analyse mathématique une approche historique, De Boeck, Bruxelles 2010.

[14] J. Voedts, Cours de mathématiques MP-MP , Ellipses, 2002.

[15] William F. Trench, Introduction to Real Analysis, (2013). Faculty Authored Books. Book 7. \http: //digitalcommons.trinity.edu/mono/7.